

Teste de Recuperação – 17 de Dezembro de 2007

I Parte

1. Seja H um espaço de Hilbert munido do produto interno $(\cdot, \cdot)$ e da norma induzida $\|\cdot\|$, e seja $P \in \mathcal{L}(H)$ um operador de projecção, i.e. $(Pu, v) = (u, Pv) \quad \forall u, v \in H$ e $P^2 = P$.

a) Prove que

$$0 \leq (Pu, u) \leq (u, u) \quad \forall u \in H. \quad [1.5]$$

b) Sejam $P_1, P_2 \in \mathcal{L}(H)$ dois operadores de projecção. Mostre que P_1P_2 é uma projecção se e só se P_1 e P_2 comutam, i.e. $P_1P_2 = P_2P_1$. [1.5]

2. Considere a seguinte equação integral de Volterra não linear

$$u(t) = \int_0^t k(t, s, u(s)) ds + f(t), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

onde $k(t, s, u)$ é contínua em $S = \{(t, s, u) \mid 0 \leq s \leq t \leq 1, u \in \mathbb{R}\}$ e $f \in C([0, 1])$. Suponha que existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$|k(t, s, u_1) - k(t, s, u_2)| \leq M |u_1 - u_2|, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1, \quad u_1, u_2 \in \mathbb{R}.$$

Seja $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ um operador integral definido por

$$Tu(t) := \int_0^t k(t, s, u(s)) ds + f(t)$$

e $\|\cdot\|$ uma norma em $C([0, 1])$ definida por

$$\|u\| = \max_{0 \leq t \leq 1} e^{-\beta t} |u(t)|, \quad \beta > M.$$

Prove que T é um operador contractivo na norma $\|\cdot\|$. [2.0]

3. Seja $f : \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função duas vezes continuamente diferenciável e considere a função $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(Ax + b)$, onde $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$ e $b \in \mathbb{R}^M$.

Determine as duas primeiras derivadas de Fréchet de g em $x = 0$. [2.0]

4. Seja $F(x) = Ax - b$, com $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ não singular e $b \in \mathbb{R}^N$, e considere a aproximação numérica do sistema linear $F(x) = 0$ pelo método de Broyden.

a) Prove que a matriz Jacobiana de F satisfaz a equação da secante $J_F(x_k)s_k = y_k \quad \forall k \geq 0$. [1.5]

b) Prove que

$$B_{k+1} - A = \left(B_k - A \right) \left(I - \frac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k} \right), \quad k = 0, 1, \dots,$$

onde B_k é a matriz de actualização de Broyden. [1.5]

II Parte

5. Considere o seguinte problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|x\|^3 \quad (1)$$

em que $\|\cdot\|$ indica a norma euclidiana em $\mathbb{R}^N$.

a) Seja $f(x) = \|x\|^3$. Mostre que $\nabla f(x) = 3\|x\|x$. Determine a matriz Hessiana da função objectivo $f(x)$. [2.0]

b) Mostre que o método de Newton puro aplicado ao problema (1) reduz-se a

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2} x^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Qual é a ordem de convergência do método? [1.5]

Sugestão: A seguinte fórmula pode ser útil

$$\left(I + \frac{xx^T}{\|x\|^2} \right)^{-1} = \left(I - \frac{xx^T}{2\|x\|^2} \right).$$

6. Considere o seguinte problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 \cos x_2.$$

a) Determine os pontos estacionários e os minimizantes locais e globais do problema. [1.5]

b) Considere $x^{(0)} = [1 \ 0]^T$, $B_0 = H_f(x^{(0)})$, e determine a matriz B_1 pela formula de actualização do método BFGS. [1.5]

7. Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} x_1 x_2 \quad \text{sujeito a} \quad 4 - x_1^2 - x_2^2 - 4x_3^2 \geq 0, \quad (2)$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3)$.

a) Escreva as condições KKT para o problema (2). Determine os pontos estacionários (x_*, λ^*) em que as condições necessárias de optimalidade de primeira ordem são satisfeitas. [1.5]

b) Considere as condições suficientes de optimalidade de segunda ordem e classifique todos os pontos estacionários (minimizantes, pontos de sela, maximizantes). Determine as soluções locais e globais do problema. [2.0]