

**2º Teste – 16 de Dezembro de 2008**

**1.** Considere o seguinte problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} \|x\|^2 \quad (1)$$

em que  $\|\cdot\|$  é a norma euclidiana em  $\mathbb{R}^N$ .

**a)** Determine a solução global do problema (1). **[1.0]**

**b)** Mostre que o método BFGS aplicado ao problema (1) reduz-se a:

- Escolher  $x_0 \in \mathbb{R}^N$  e  $H_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , simétrica e definida positiva.
- Para  $k = 0, 1, \dots$ 
  1. Resolver o sistema linear  $H_k s_k = -x_k$
  2. Fazer  $x_{k+1} = x_k + s_k$
  3. Calcular

$$H_{k+1} = H_k + \frac{x_k x_k^T}{x_k^T s_k} + \frac{s_k s_k^T}{s_k^T s_k}. \quad (2.0)$$

**c)** Considere  $N = 2$ ,  $x_0 = [2 \ 2]^T$ ,  $H_0 = \text{diag}(1, 2)$  e determine as duas primeiras iteradas  $x_1$  e  $x_2$  pelo método BFGS. **[1.5]**

**2.** Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^N x_j \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} \prod_{j=1}^N x_j = 1 \\ x_1, x_2, \dots, x_N \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

**a)** Escreva as condições KKT para o problema (2). **[1.5]**

**b)** Prove que  $x_* = [1 \ 1 \dots \ 1]^T$  é uma solução local estrita do problema. **[1.5]**

**3.** Considere um problema de minimização com  $M$  restrições de igualdade

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x) \quad \text{sujeito a} \quad c_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, M. \quad (3)$$

**a)** Mostre que as condições KKT para o problema (3) podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} \nabla f(x) - J_c(x)^T \lambda = 0 \\ c(x) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

onde  $c: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ ,  $c(x) = [c_1(x) \ c_2(x) \ \dots \ c_M(x)]^T$ ,  $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_M]^T \in \mathbb{R}^M$  e  $J_c(x)$  é a matriz Jacobiana de  $c$  em  $x$ . **[1.0]**

**b)** Suponha que existe um ponto  $(x_*, \lambda^*)$  em que as condições necessárias de optimalidade de primeira e segunda ordem sejam satisfeitas e considere a matriz Jacobiana do sistema não linear (4) em  $(x_*, \lambda^*)$

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \nabla_x^2 \mathcal{L}(x_*, \lambda^*) & -J_c(x_*)^T \\ J_c(x_*) & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

onde  $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda^T c(x)$  é a função Lagrangeana do problema (3). Prove que  $\mathcal{J}$  é invertível se e só se as condições suficientes de optimalidade de segunda ordem forem satisfeitas. **[1.5]**