

Exame – 16 de Janeiro de 2010

1. Seja V um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear contínuo tal que $\|T\| < 1$.

a) Admitindo que $(I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(V)$ existe, mostre que $(I - T)^{-1}$ pode ser determinado pela série de Neumann

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

e que $\|(I - T)^{-1}\| \leq 1/(1 - \|T\|)$. **[1.5]**

b) Seja $S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ um operador linear contínuo definido pela matriz

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine S^{-1} pela série de Neumann. **[1.5]**

2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}, \quad x_2 > 0.$$

Mostre que f é convexa. **[1.5]**

3. Considere a seguinte equação integral de Volterra

$$u(t) = 1 + \int_0^t u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

a) Mostre, pelo teorema do ponto fixo de Banach, que a equação (1) admite uma e uma única solução $u \in C[0, \frac{1}{2}]$. **[1.5]**

b) Considere $u_0(t) = 0$ e determine, pelo método iterativo do ponto fixo, a aproximação u_n de u . Estime o erro $\|u - u_n\|_{C[0, \frac{1}{2}]}$ e calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$. **[1.5]**

4. Sejam $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $y, s \in \mathbb{R}^N$, $s \neq 0$, e $Q(y, s) = \{B \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid Bs = y\}$.

Resolva o problema de minimização

$$\min_{B \in Q(y, s)} \|B - A\|_F. \quad \text{[1.5]}$$

5. Suponha que $f : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa e continuamente diferenciável num aberto convexo D . Prove que $x_* \in D$ é um minimizante global de f se e só se $\nabla f(x_*)^T(x - x_*) \geq 0 \quad \forall x \in D$. [2.0]

6. Considere o seguinte problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{3}{2} (x_1^2 + x_2^2) + (1+a)x_1x_2 - x_1 - x_2 + 1, \quad (2)$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é um parâmetro. Determine os valores de a para os quais o problema (2) admite um único minimizante global. Calcule ainda esse minimizante (em função de a). [2.0]

7. Considere o método de Newton puro para a aproximação numérica do seguinte problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \frac{x_1^3}{6} + \frac{x_2^2}{2}. \quad (3)$$

Mostre que, se $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$, $x_1^{(0)} \neq 0$, então a aproximação $\mathbf{x}^{(k)}$ é dada por

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left(\frac{x_1^{(0)}}{2^k}, 0 \right).$$

O método converge para a solução global do problema? Justifique a sua resposta. [2.0]

8. O problema de minimização

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \max\{f_1(x), f_2(x)\}, \quad (4)$$

é equivalente ao seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{\{x \in \mathbb{R}^N, y \in \mathbb{R}\}} y \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} y - f_1(x) \geq 0 \\ y - f_2(x) \geq 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Supondo que $f_1, f_2 : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ são continuamente diferenciáveis, mostre que, se $x_* \in \mathbb{R}^N$ for um minimizante local de (4), então existem $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tais que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_1 \nabla f_1(x_*) + \lambda_2 \nabla f_2(x_*) = 0.$$

Prove ainda que $\lambda_k = 0$ desde que $f_k(x_*) < \max\{f_1(x_*), f_2(x_*)\}$, $k = 1, 2$. [2.0]

9. Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} x_1 + x_2 \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} -x_1^2 + x_2 \geq 0 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}. \quad (6)$$

a) Determine, graficamente, a solução global $x_* \in \mathbb{R}^2$ do problema. [1.0]

b) Escreva a função de barreira logarítmica $P(x; \mu)$ para o problema (6) e determine os pontos estacionários $x_*(\mu) \in \Omega^\circ$ do problema de minimização sem restrições $\min_{x \in \Omega^\circ} P(x; \mu)$. Admitindo que os pontos $x_*(\mu_k)$ são minimizantes globais de $P(x; \mu_k)$, $k = 1, 2, \dots$, prove que a sucessão $\{x_*(\mu_k)\}$ converge para x_* quando $\mu_k \searrow 0$. [2.0]