**Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica**
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

**Análise Numérica** (LMAC/MMA/MEIC)

**Teste de Recuperação – 16 de Janeiro de 2009**

## $1^o$ **Teste**

**1.** Determine o sistema linear (para os $M_j$) associado ao cálculo do spline cúbico $s$, interpolador de $f(x) = 1 - x^4$ nos pontos $x_0 = -1, x_1 = 0$ e $x_2 = 1$, com a condição da derivada nos extremos. Obtenha ainda um majorante para o erro $\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - s(x)|$. **[1.5]**

**2.** Aproxime o integral $I = \int_{-1}^{1}(1 - x^2)^{5/2}\, dx$ pela quadratura de Gauss–Chebyshev com 3 pontos. Obtenha uma estimativa para o erro da aproximação. **[2.0]**

**3.** Resolva o problema de minimização

$$\min_{p\in\mathcal{P}_3[-1,1]} \int_{-1}^{1} \Big[f(x) - p(x)\Big]^2 dx\,,$$

onde $f(x) = \cos \pi x$. **[2.0]**

**4.** Prove que

$$\sum_{j=0}^{n} \int_{-1}^{1} \Big(\frac{1}{n+1} - P_j(x)\Big)\, dx = 0\,, \qquad \forall\, n \geq 0\,,$$

onde $P_j, j = 0, 1, \ldots, n$, são os polinómios de Legendre. **[1.5]**

**5.** Sejam $v, w \in \mathbb{R}^N$. Prove que

$$\|vw^T\|_F = \|v\|_2\, \|w\|_2\ ,$$

onde $\|\cdot\|_F$ é a norma de Fröbenius e $\|\cdot\|_2$ a norma euclidiana vectorial. **[1.5]**

**6.** Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 3 & 0 & -0.5 \\ 0 & -1 & 7 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Localize, pelo teorema de Gerschgorin, os valores próprios de $A$. **[1.5]**

## $2^o$ **Teste**

**1.** Considere a seguinte matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 5.5 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1.5 & -0.5 \\ 2.5 & -0.5 & 2.5 \end{bmatrix}.$$

Transforme a matriz $A$ numa matriz $B$, semelhante a $A$ e que esteja na forma de Hessenberg superior. **[2.0]**

**2.** Considere a matriz $I + uu^T$, onde $u \in \mathbb{R}^N$. Obtenha uma fórmula para o cálculo da inversa de $I + uu^T$. **[1.5]**

**3.** Considere o seguinte método multipasso linear a 2 passos

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = \frac{h}{2}\Big(f_{n+2} - f_n\Big), \quad n \geq 0. \tag{1}$$

Analise a ordem de consistência, convergência e estabilidade absoluta do método (1). **[2.5]**

**4.** Considere a seguinte tabela de Butcher, associada a um método de Runge–Kutta de 2 etapas

$$\begin{array}{c|cc} \frac{1}{3} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \tag{2}$$

**a)** Analise a consistência e convergência do método. Determine a sua ordem. **[1.5]**

**b)** A função de estabilidade do método é dada por

$$R(\overline{h}) = \frac{6 + 2\,\overline{h}}{6 - 4\,\overline{h} + \overline{h}^2}, \quad \overline{h} \in \mathbb{C}.$$

Determine os intervalos de estabilidade absoluta do método de Runge–Kutta (2). **[1.0]**

**c)** Considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'(t) = t\,y^2(t), & t > 0 \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3}$$

Obtenha uma aproximação da solução de (3) em $t = 0.5$ pelo método de Runge-Kutta associado à tabela de Butcher (2). Considere $h = 0.5$. **[1.5]**