Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA/MEIC)

2^o **Teste – 15 de Dezembro de 2008**

1. Considere a seguinte matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine uma matriz de Householder P tal que a matriz PAP seja simétrica, tridiagonal e semelhante a A. Calcule ainda a matriz PAP e os valores próprios de A. **[2.0]**

2. Considere a seguinte matriz simétrica e tridiagonal

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Prove, pelas sucessões de Sturm, que T tem três valores próprios positivos. Mostre ainda que os valores próprios positivos pertencem ao intervalo $]0, 10]$. **[1.5]**

3. Prove que a matriz $I + uv^T$, onde $u, v \in \mathbb{R}^N$, é invertível se e só se $1 + v^T u \neq 0$. **[1.5]**

4. Considere a seguinte tabela de Butcher, associada a um método de Runge-Kutta de 3 etapas

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \qquad (1)$$

a) Analise a consistência, zero-estabilidade e convergência do método. Determine a sua ordem. O método é explícito, implícito ou diagonalmente implícito? Justifique a sua resposta. **[1.5]**

b) Considere a resolução numérica da equação diferencial autónoma

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t)), \quad t > 0 \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

pelo método de Runge-Kutta definido pela tabela de Butcher (1). Mostre que o método pode ser escrito na forma

$$\text{(RK)} \qquad \begin{cases} y_* = y_n + \dfrac{h}{4}\Big(f(y_n) + f(y_*)\Big), \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{3}\Big(4y_* - y_n + h\, f(y_{n+1})\Big). \end{cases} \qquad [1.5]$$

c) Verifique que a função de estabilidade do método de Runge-Kutta (RK) é dada por

$$R(\overline{h}) = \frac{12 + 5\,\overline{h}}{12 - 7\,\overline{h} + \overline{h}^2}, \quad \overline{h} \in \mathbb{C}.$$

Mostre que o método é absolutamente estável $\forall\, \overline{h} \in \mathbb{R}_- = \Big\{\overline{h} \in \mathbb{R} \,|\, \overline{h} < 0\Big\}$. O método poderá ser A-estável? Justifique a sua resposta. **[2.0]**