

Mestrado em Matemática e Aplicações – Instituto Superior Técnico
Análise Numérica Funcional e Optimização

1^o Teste – 14 de Novembro de 2007

1. Seja H um espaço de Hilbert munido do produto interno $(\cdot, \cdot)$ e da norma induzida $\|\cdot\|$. Prove que

$$\|u\| = \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\|=1}} |(u, v)|. \quad [1.5]$$

2. Seja H um espaço de Hilbert, $T \in \mathcal{L}(H)$ um operador auto-adjunto, i.e.

$$(Tu, v) = (u, Tv) \quad \forall u, v \in H,$$

$F : H \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional definido por $F(u) = \frac{1}{2} \|Tu - w\|^2$, onde $\|\cdot\|$ é a norma induzida pelo produto interno $(\cdot, \cdot)$ e $w \in H$.

a) Prove que a derivada de Fréchet de F em $u \in H$ é um funcional linear contínuo definido por

$$F'(u)h = (T^2u - Tw, h) \quad \forall h \in H. \quad [2.0]$$

b) Determine a segunda derivada de Fréchet de F em $u \in H$. [1.0]

3. Seja $V = C([0, 1])$ e considere equação integral

$$u(t) = \lambda \int_0^1 \cos(su(s)) ds + f(t), \quad (1)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f \in V$.

a) Mostre que existe $\lambda_0 > 0$ tal que para $|\lambda| \leq \lambda_0$, a equação (1) admite uma e uma única solução $u \in V$. [1.5]

b) Seja $f(t) = 1$. Aproxime a solução da equação (1) pelo método do ponto fixo. Considere $\lambda = 0.5$, $u_0(t) = 0$ e determine as duas primeiras iteradas. Obtenha um majorante para o erro

$$\|u - u_2\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |u(t) - u_2(t)|. \quad [1.5]$$

4. Seja $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ e considere a aproximação numérica da solução da equação $F(x) = 0$ pelo seguinte método quase Newton (tipo Broyden)

Algoritmo

Escolher $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $A_0 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ não singular. Para $k = 0, 1, \dots$

1. Fazer $s_k = -A_k^{-1} F(x_k)$, $x_{k+1} = x_k + s_k$ e $y_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$.
2. Calcular

$$A_{k+1}^{-1} = A_k^{-1} + \frac{(s_k - A_k^{-1} y_k) y_k^T}{y_k^T y_k}. \quad (2)$$

a) Prove que

$$\|A_{k+1}^{-1} - A_k^{-1}\|_F \leq \|B^{-1} - A_k^{-1}\|_F \quad \forall B \in Q(y_k, s_k), \quad B \in \mathbb{R}^{N \times N} \text{ não singular},$$

onde $Q(y, s) = \{B \in \mathbb{R}^{N \times N} \mid Bs = y\}$. [1.5]

b) Mostre que (2) é equivalente à fórmula da actualização

$$A_{k+1} = A_k + \frac{(y_k - A_k s_k) y_k^T A_k}{y_k^T A_k s_k}, \quad [1.0]$$

desde que A_k seja não singular e $y_k^T A_k s_k \neq 0$.