Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação)

2^o **Teste – 13 de Dezembro de 2007**

1. Seja $U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ uma matriz de Householder tal que

$$Ux = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{r-1} \\ \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad 1 \le r \le N\,, \quad x = [x_1 \ \ldots \ x_N]^T \in \mathbb{R}^N\,.$$

Suponha que $d := \sqrt{x_r^2 + \ldots x_N^2} \neq 0$ e mostre que as componentes $u_{ij}, i, j = 1, \ldots, N$, da matriz U são dadas pelas fórmulas

$$u_{ii} = \begin{cases} 1 \quad , & 1 \le i \le r-1 \\ -\dfrac{|x_r|}{d} \quad , & i = r \\ 1 - \dfrac{x_i^2}{d^2 + d\,|x_r|} \quad , & r+1 \le i \le N \end{cases} \tag{1}$$

$$u_{ij} = \begin{cases} 0 \quad , & 1 \le i \le r-1\,,\ i+1 \le j \le N \\ -\dfrac{x_r x_j}{|x_r| d} \quad , & i = r\,,\ r+1 \le j \le N \\ -\dfrac{x_i x_j}{d^2 + d\,|x_r|} \quad , & r+1 \le i \le N-1\,,\ i+1 \le j \le N \end{cases} \tag{2}$$

e por $u_{ji} = u_{ij}$ (visto que U é simétrica). **[2.0]**

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obtenha a factorização QR de A pelas matrizes de Householder, i.e. determine matrizes U_1 e U_2 tais que $U_2 U_1 A$ é uma matriz triangular superior. Sugestão: Pode usar as fórmulas (1)–(2). **[2.0]**

3. Considere o seguinte método preditor-corrector

$$\begin{cases} y_{n+2}^{(0)} + 4y_{n+1} - 5y_n = 2h\,(2f_{n+1} + f_n)\,, \\ y_{n+2} - y_n = \dfrac{h}{3}\left(f_{n+2}^{(0)} + 4f_{n+1} + f_n\right), \end{cases} \qquad n \geq 0\,, \tag{3}$$

onde $f_n = f(t_n, y_n)$.

a) Analise a consistência, zero-estabilidade e convergência do método preditor. **[2.0]**

b) Mostre que se o método (3) for aplicado ao problema modelo

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda\, y(t)\,, \quad t > 0\,, \\ y(0) = y_0\,, \end{cases}$$

a solução numérica y_n satisfaz a equação às diferenças

$$y_{n+2} - \frac{4}{3}\,\overline{h}^2 y_{n+1} - \left(1 + 2\overline{h} + \frac{2}{3}\,\overline{h}^2\right) y_n = 0\,,$$

onde $\overline{h} = \lambda\, h$. **[2.0]**

c) Prove que o método preditor-corrector (3) é absolutamente estável se $\overline{h} \in\,]-1, 0\,[$. O método é zero-estável ou A-estável? **[2.0]**

Sugestão: A seguinte expansão pode ser útil

$$\sqrt{\frac{40}{9}\,x^2 + 8\,x + 4} \;=\; 2 + 2\,x + \frac{x^2}{9} + O(x^3)\,.$$