Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA/MEIC)

2º Teste/1º Exame – 13 de Janeiro de 2010

2º Teste

1. Considere a transformação de semelhança de uma matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ numa matriz tridiagonal $T \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Explique, usando matrizes de Householder, os $N-2$ passos deste processo e relacione os valores e vectores próprios de A com os valores e vectores próprios de T. **[2.0]**

2. Considere a seguinte matriz simétrica e tridiagonal

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Admitindo que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ são os valores próprios de T, prove, pelas sucessões de Sturm, que $0 < \lambda_3 < 1 < \lambda_4 < 3$. Mostre ainda que $\lambda_1 = -\lambda_4$ e $\lambda_2 = -\lambda_3$. **[2.0]**

3. Considere o método multipasso linear

$$y_{n+3} - y_{n+1} = h\,(b_0\, f_n + b_1\, f_{n+1} + b_2\, f_{n+2})\,, \quad n \geq 0\,, \tag{1}$$

onde $f_n = f(t_n, y_n)$. Determine os coeficientes $b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ de modo que a ordem de consistência do método seja igual a 3. Analise a zero-estabilidade e convergência do método deduzido. O método poderá ser A-estável? Justifique a sua resposta. **[2.0]**

4. A ordem de consistência de um método multipasso linear é igual a p se e só se

$$\rho(e^z) - z\,\sigma(e^z) = O(z^{p+1})\,, \tag{2}$$

onde $\rho(z)$ e $\sigma(z)$ são o primeiro e o segundo polinómio característico do método. Utilize a condição (2) para analisar a ordem de consistência do método$-\theta$. **[1.5]**

5. Considere o seguinte método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}\Big(3\,k_1 + k_2\Big)\,, \quad n \geq 0\,, \\ k_1 &= f\Big(t_n + \frac{h}{3}\,, y_n + \frac{h}{3}\,k_1\Big)\,, \quad k_2 = f(t_n + h, y_n + h\,k_1)\,, \end{aligned} \tag{3}$$

Determine a ordem do método (3). Mostre que a sua função de estabilidade é dada por

$$R(z) = \frac{1 + \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{6}}{1 - \frac{z}{3}}\,.$$

O método poderá ser A-estável? Justifique a sua resposta. **[2.5]**

1^{o} **Exame**

1. Considere os seguintes valores tabelados de uma função f

x	-1	0	1
$f(x)$	1	-1	1

Determine o spline cúbico natural, interpolador de f, nos três pontos da tabela. **[2.0]**

2. Determine a melhor aproximação uniforme de $f(x) = 1 - |x|$ em $\mathcal{P}_2[-2, 2]$. **[2.0]**

3. Considere a seguinte quadratura numérica

$$I_3(f) = A_0\, f(-x_0) + A_1\, f(-x_1) + A_1\, f(x_1) + A_0\, f(x_0)\,,$$

onde $A_0, A_1, x_0, x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_0 \neq x_1$.

a) Mostre que é possível escolher os pesos A_0, A_1 e os nodos x_0, x_1 de modo que a quadratura seja uma de Gauss–Legendre. **[2.0]**

b) Aproxime o integral $I(f) = \int\limits_{-1}^{1} \ln(1 + x^2)\,\mathrm{d}x$ pela quadratura de Gauss-Legendre com 4 pontos. **[2.0]**

4. Seja $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ uma matriz estritamente diagonal dominante por linhas, i.e.

$$|a_{jj}| > \sum_{k=1,k\neq j}^{N} |a_{jk}| \qquad \forall\, j = 1, \ldots, N\,.$$

Mostre, pelo teorema de Gerschgorin, que a matriz A é não singular. **[2.0]**

5–9. Problemas **1–5.** do 2^{o} **Teste**.