

2º Teste – 11 de Dezembro de 2007

1. Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^N$ e considere um método de procura unidireccional $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ para a resolução numérica do problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} f(x).$$

Suponha que $x_k \in \mathbb{R}^N$ é um ponto tal que $H_f(x_k)$ é não singular e considere a direcção p_k definida por

$$p_k = -\nabla f(x_k) - H_f^{-1}(x_k) \nabla f(x_k).$$

Dê condições sobre $H_f^{-1}(x_k)$ para que p_k seja uma direcção de descida. [1.5]

2. Considere o problema de minimização sem restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|Ax - b\|_2^2, \quad (1)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $M < N$, com $\text{rank}(A) = M$, e $b \in \mathbb{R}^M$.

Calcule os pontos minimizantes de f , isto é, deduza e resolva as condições necessárias de optimalidade de primeira ordem e verifique as condições suficientes de segunda ordem. [2.5]

3. Considere o seguinte problema de minimização com restrições

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) \quad \text{sujeito a} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2, \\ x_1 + 2x_2 \leq 3. \end{cases} \quad (2)$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 14x_1 - 6x_2 - 7$.

Escreva as condições KKT para o problema (2). Determine os pontos (x_*, λ^*) em que as condições KKT são satisfeitas. Verifique as condições suficientes de optimalidade de segunda ordem e obtenha as soluções locais e globais do problema. [2.5]

4. Considere o seguinte problema de programação quadrática

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \frac{1}{2} x^T G x + x^T d \quad \text{sujeito a} \quad Ax = b, \quad (3)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{M \times N}$, $M < N$, com $\text{rank}(A) = M$, $d \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^M$ e $G \in \mathbb{R}^{N \times N}$ é uma matriz simétrica e definida positiva no subespaço $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid Ax = 0\}$.

a) Prove que a matriz KKT do problema, dada por

$$\begin{bmatrix} G & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(N+M) \times (N+M)},$$

é não singular. [2.0]

b) Apresente as condições necessárias de optimalidade de primeira ordem para o problema (3) e mostre que as condições são satisfeitas em (x_*, λ^*) , com

$$\begin{aligned} x_* &= G^{-1} A^T (A G^{-1} A^T)^{-1} [A G^{-1} d + b] - G^{-1} d \\ \lambda^* &= -(A G^{-1} A^T)^{-1} [A G^{-1} d + b] \end{aligned} \quad [1.5]$$