Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA/MEIC)

1^o **Teste – 11 de Novembro de 2009**

1. Determine, pelas diferenças divididas de Newton, o polinómio interpolador de Hermite de grau ≤ 5 da função $f(x) = \cos \pi x$ nos pontos $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$. Prove ainda que

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - H_5\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 0.2 \,.$$ [**2.0**]

2. Considere os seguintes valores tabelados de uma função f

x	-2	-1	1	2
$f(x)$	1	-1	-1	1

Determine o sistema linear associado ao cálculo do spline cúbico periódico interpolador de f nos quatro pontos da tabela. [**2.0**]

3. Resolva o problema de minimização

$$\min_{p \in \mathcal{P}_{n-1}[-2,2]} \; \max_{x \in [-2,2]} |x^n + p(x)| \,.$$ [**2.0**]

4. Considere, para a aproximação numérica do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, a fórmula de quadratura de Gauss-Legendre

$$I_n(f) = \sum_{j=0}^{n} A_j f(x_j),$$

onde os nodos $x_j, j = 0, \ldots, n$ são zeros do polinómio de Legendre $P_{n+1}(x)$. Mostre que os pesos da quadratura podem ser calculados a partir das fórmulas

$$A_j = \frac{1}{P'_{n+1}(x_j)} \int_{-1}^{1} \frac{P_{n+1}(x)}{x - x_j}\,dx \,, \qquad j = 0, \ldots, n.$$ [**2.0**]

5. Considere a seguinte matriz complexa

$$A = \begin{bmatrix} 3\mathrm{i} & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & 3 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & -2 & 1 \\ 0.5 & -0.5 & 1 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}.$$

Localize, pelo teorema de Gerschgorin, os valores próprios de A. Algum dos valores próprios é dominante? [**2.0**]