Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA) – 1º Semestre de 2016/2017

1º **Teste – 8 de Novembro de 2016 – Resolução**

1. Seja s o spline cúbico que interpola a função $f(x) = x^4$ nos pontos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ e satisfaz as condições $s''(x_0) = f''(x_0)$ e $s''(x_3) = f''(x_3)$. Calcule a segunda derivada de s nos pontos de interpolação, i.e. determine os $M_j, j = 0, 1, 2, 3$.

Resolução: As duas condições adicionais são: $M_0 = f''(x_0) = 48$ e $M_3 = f''(x_3) = 48$. Temos $h_0 = 1, h_1 = 2, h_2 = 1, \mu_1 = 1/3, \mu_2 = 2/3, \lambda_1 = 2/3, \lambda_2 = 1/3$. O sistema linear para os M_j's fica assim

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 2(f[x_1,x_2] - f[x_0,x_1]) \\ 2(f[x_2,x_3] - f[x_1,x_2]) \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 \\ 30 \\ 30 \\ 48 \end{bmatrix}$$

Segue-se que

$$\begin{bmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 - M_0/3 \\ 30 - M_3/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 14 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad M_1 = M_2 = \frac{21}{4}\,.$$

2. Seja p_2 o polinómio interpolador de $f \in C^4[z-h, z+h]$ em $x_0 = z - h, x_1 = z$ e $x_2 = z + h$ $(h > 0)$.

a) Deduza uma fórmula de diferenças centradas para a aproximação da primeira derivada de f usando o polinómio p_2.

Resolução: O polinómio interpolador p_2 pode ser escrito na forma:

$$p_2(x) = f[x_0] + f[x_0,x_2]\,(x - x_0) + f[x_0,x_2,x_1]\,(x - x_0)(x - x_2)\,.$$

Assim:

$$p_2'(x) = f[x_0,x_2] + f[x_0,x_1,x_2]\,(2x - (x_0 + x_2)) \quad \Rightarrow \quad p_2'(z) = f[x_0,x_2] + [x_0,x_1,x_2]\,(2z - (z-h+z+h))\,.$$

Portanto

$$f'(z) \approx p_2'(z) = f[x_0,x_2] = \frac{f(z+h) - f(z-h)}{2h}\,.$$

b) Sabendo que

$$f'(x) - p_2'(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\,W_3(x) + \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!}\,W_3'(x)\,, \qquad \xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_2)\,, \qquad W_3(x) = \prod_{j=0}^{2} (x - x_j)\,,$$

mostre que

$$f'(z) - p_2'(z) = -\frac{h^2}{6}\,f^{(3)}(\xi)\,, \quad \xi \in (z-h, z+h)\,.$$

Resolução: Temos

$$W_3(z) = (z - x_0)(z - x_1)(z - x_2) = (z - (z - h))(z - z)(z - (z + h)) = 0\,,$$

$$W_3'(z) = (z - x_0)(z - x_1) + (z - x_0)(z - x_2) + (z - x_1)(z - x_2) = (z - x_0)(z - x_2) = -h^2\,.$$

Portanto

$$f'(z) - p_2'(z) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\, W_3'(z) = -\,\frac{h^2}{6}\, f^{(3)}(\xi)\,, \quad \xi \in (z - h, z + h)\,.$$

3. Pretende-se construir um polinómio interpolador p_2 de grau ≤ 2 da função $f(x) = 8\sqrt{3}\,x^3 + 8x^2$ utilizando três pontos distintos do intervalo $[-1, 1]$. Determine os pontos de interpolação x_0, x_1 e x_2 de modo que o erro

$$e_2 := \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)|$$

seja minimizado. Determine ainda o valor mínimo de e_2.

Resolução: O erro de interpolação é dado por

$$f(x) - p_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\, W_3(x) = 8\sqrt{3}\,(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\,.$$

A expressão $\max_{x\in[-1,1]} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)|$, e por conseguinte $e_2 = \max_{x\in[-1,1]} |f(x)-p_2(x)|$, é minimizada quando $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ coincide com o polinómio de Chebyshev mónico de grau 3. Portanto, os pontos de interpolação devem ser os zeros do polinómio de Chebyshev T_3. Temos

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad x_1 = 0\,, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Além disso $(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = T_3(x)/4$ e $\max_{x\in[-1,1]} |T_3(x)| = 1$ pelo que

$$e_2 = \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| = \frac{8\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}\,.$$

4. Resolva o seguinte problema de minimização

$$\min_{p\in\mathcal{P}_3[-1,1]} \int_{-1}^{1} \frac{[x^5 - p(x)]^2}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx\,.$$

(Sugestão: Escreva x^5 em função de polinómios de Chebyshev.)

Resolução: Sejam $(u, v)_w = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ e $f(x) = x^5$. Temos

$$T_0(x) = 1\,, \quad T_1(x) = x\,, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1\,, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x\,, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1\,,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x\,, \qquad (T_k, T_j)_w = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ \pi, & j = k = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & j = k > 0 \end{cases}\,.$$

Segue-se que

$$x^5 = \frac{T_5(x)}{16} + \frac{5}{4}x^3 - \frac{5}{16}x = \frac{T_5(x)}{16} + \frac{5}{16}T_3(x) + \frac{15}{16}x - \frac{5}{16}x = \frac{T_5(x)}{16} + \frac{5}{16}T_3(x) + \frac{10}{16}T_1(x)\,.$$

A melhor aproximação mínimos quadrados de f em $\mathcal{P}_3[-1,1]$ é assim

$$p_3^*(x) = \sum_{j=0}^{3} \frac{(f,T_j)_w}{(T_j,T_j)_w} T_j(x) = \frac{1}{16} \sum_{j=0}^{3} \frac{(T_5,T_j)_w}{(T_j,T_j)_w} T_j(x) + \frac{5}{16} \sum_{j=0}^{3} \frac{(T_3,T_j)_w}{(T_j,T_j)_w} T_j(x) + \frac{10}{16} \sum_{j=0}^{3} \frac{(T_1,T_j)_w}{(T_j,T_j)_w} T_j(x)$$

$$= 0 + \frac{5}{16} T_3(x) + \frac{10}{16} T_1(x) = \frac{5}{4} x^3 - \frac{5}{16} x\,.$$

5. Sejam $\bar{P}_j(x)$, $j \geq 0$, os polinómios de Legendre ortonormados, i.e. $(\bar{P}_j, \bar{P}_j) = 1,\ \forall j \geq 0$, e seja

$$q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (\bar{P}_j, f) \bar{P}_j(x),$$

a melhor aproximação mínimos quadrados de $f \in C[-1,1]$ em $\mathcal{P}_n[-1,1]$. Mostre que

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - q_n(x)]^2\, dx = \int_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx - \sum_{j=0}^{n} (\bar{P}_j, f)^2\,.$$

<u>Resolução:</u> Seja $(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx$. Tendo em conta que q_n é a melhor aproximação mínimos quadrados de $f \in C[-1,1]$ em $\mathcal{P}_n[-1,1]$, temos

$$(f - q_n, q) = 0 \quad \forall\, q \in \mathcal{P}_n[-1,1]\,.$$

Portanto

$$(f - q_n, f - q_n) = (f,f) - 2(f,q_n) + (q_n,q_n) = (f,f) - 2(q_n,q_n) + (q_n,q_n) = (f,f) - (q_n,q_n)\,.$$

Além disso, como $(\bar{P}_j, \bar{P}_k) = 0$ quando $j \neq k$, conclui-se que

$$(q_n,q_n) = \left(\sum_{j=0}^{n} (\bar{P}_j, f) \bar{P}_j, \sum_{k=0}^{n} (\bar{P}_k, f) \bar{P}_k \right) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} (\bar{P}_j, f)\,(\bar{P}_k, f)\,(\bar{P}_j, \bar{P}_k) = \sum_{j=0}^{n} (\bar{P}_j, f)^2\,.$$