Unidade de Ensino de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA) – 1º Semestre de 2016/2017

1º Teste – 8 de Novembro de 2016

1. Seja s o spline cúbico que interpola a função $f(x) = x^4$ nos pontos $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = 1$ e $x_3 = 2$ e satisfaz as condições $s''(x_0) = f''(x_0)$ e $s''(x_3) = f''(x_3)$. Calcule a segunda derivada de s nos pontos de interpolação, i.e. determine os $M_j, j = 0, 1, 2, 3$. **[2.0]**

2. Seja p_2 o polinómio interpolador de $f \in C^4[z-h, z+h]$ em $x_0 = z-h, x_1 = z$ e $x_2 = z+h$ $(h > 0)$.

a) Deduza uma fórmula de diferenças centradas para a aproximação da primeira derivada de f usando o polinómio p_2. **[1.0]**

b) Sabendo que

$$f'(x) - p_2'(x) = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} W_3(x) + \frac{f^{(3)}(\xi_2)}{3!} W_3'(x)\,, \qquad \xi_1, \xi_2 \in (x_0, x_2)\,, \qquad W_3(x) = \prod_{j=0}^{2} (x - x_j)\,,$$

mostre que

$$f'(z) - p_2'(z) = -\frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi)\,, \quad \xi \in (z-h, z+h)\,.$$ **[1.0]**

3. Pretende-se construir um polinómio interpolador p_2 de grau ≤ 2 da função $f(x) = 8\sqrt{3}\,x^3 + 8x^2$ utilizando três pontos distintos do intervalo $[-1, 1]$. Determine os pontos de interpolação x_0, x_1 e x_2 de modo que o erro

$$e_2 := \max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)|$$

seja minimizado. Determine ainda o valor mínimo de e_2. **[2.0]**

4. Resolva o seguinte problema de minimização

$$\min_{p\in\mathcal{P}_3[-1,1]} \int_{-1}^{1} \frac{[x^5 - p(x)]^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,.$$

(Sugestão: Escreva x^5 em função de polinómios de Chebyshev.) **[2.0]**

5. Sejam $\bar{P}_j(x)$, $j \geq 0$, os polinómios de Legendre ortonormados, i.e. $(\bar{P}_j, \bar{P}_j) = 1,\ \forall j \geq 0$, e seja

$$q_n(x) = \sum_{j=0}^{n} (\bar{P}_j, f)\bar{P}_j(x),$$

a melhor aproximação mínimos quadrados de $f \in C[-1,1]$ em $\mathcal{P}_n[-1,1]$. Mostre que

$$\int_{-1}^{1} [f(x) - q_n(x)]^2\, dx = \int_{-1}^{1} [f(x)]^2\, dx - \sum_{j=0}^{n} (\bar{P}_j, f)^2\,.$$ **[2.0]**