

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica

Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação)

1º Teste: 5 de Novembro de 2007

1. Seja $s \in \mathcal{S}_2[a, b]$ um spline quadrático (um spline polinomial de grau 2), construído nos $n + 1$ nós distintos $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, em que $x_0 = a$ e $x_n = b$. Suponha ainda que s interpola f nos pontos $x_0, \dots, x_n$, i.e. $s(x_j) = f(x_j)$, $j = 0, \dots, n$.

No intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ o spline s pode ser escrito na forma

$$s_j(x) = \frac{a_{j+1} - a_j}{2(x_{j+1} - x_j)} (x - x_j)^2 + a_j (x - x_j) + f_j, \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j = 0, \dots, n-1,$$

onde $f_j = f(x_j)$ e $a_j \in \mathbb{R}$. Verifique que s é um spline quadrático, interpolador de f nos nós $x_0, \dots, x_n$, se a seguinte equação (para o cálculo dos a_j) for satisfeita

$$a_j = \frac{2(f_j - f_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} - a_{j-1}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Quantas condições adicionais são necessárias para que o spline s fique determinado de forma única no intervalo $[a, b]$? [2.0]

2. Determine o polinómio p de grau ≤ 9 tal que $p(0) = 2$, $p'(0) = 0$, $p(1) = p'(1) = p''(1) = \dots = p^{(6)}(1) = 0$, $p^{(7)}(1) = 7$. [2.0]

3. Seja $p_n \in \mathcal{P}_n$ o polinómio interpolador de Lagrange de $f(x) = \ln(3+x)$, $x \in [-1, 1]$, construído nos $n+1$ zeros, $x_k = \cos((2k+1)\pi/(2n+2))$, $k = 0, \dots, n$, do polinómio de Chebyshev $T_{n+1}(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \geq 0$.

Mostre que

$$\max_{x \in [-1, 1]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{1}{2(n+1)4^n} \quad [2.0]$$

4. Mostre que a função

$$q_2^*(x) = (e-1)x^2 + \frac{e - (e-1) \ln(e-1)}{2}$$

é a melhor aproximação uniforme de $f(x) = e^{x^2}$ em $\mathcal{P}_2[-1, 1]$. [2.0]

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -2.5 & -1.5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Localize, pelo teorema de Gerschgorin, os valores próprios de A . [2.0]