Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica
Departamento de Matemática/Instituto Superior Técnico

Análise Numérica (LMAC/MMA/MEIC)

2º **Exame – 1 de Fevereiro de 2010**

1. Considere os seguintes valores tabelados

x	-1	0	1
$f(x)$	1	1	1
$f'(x)$	1	0	1

Determine o polinómio interpolador de Hermite de f nos três pontos da tabela. **[2.0]**

2. Mostre que

$$p_2^*(x) = -\frac{5}{8}\Big(\frac{3}{4}\,x^2 - 1\Big)$$

é a melhor aproximação mínimos quadrados de $f(x) = 1 - |x|$ em $\mathcal{P}_3[-2, 2]$. **[2.0]**

3. Considere, para a aproximação numérica do integral $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, a seguinte quadratura numérica

$$I_3(f) = A_0\,f(-1) + A_1\,f(-x_0) + A_1\,f(x_0) + A_0\,f(1)\,,$$

onde $A_0, A_1, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Determine A_0, A_1 e x_0 de modo que o grau de precisão da quadratura seja igual a 4. Qual é o grau de precisão da quadratura obtida. **[2.0]**

4. a) Mostre que as matrizes

$$U_1 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -6 & -3 & -2 \\ -3 & \frac{82}{13} & -\frac{6}{13} \\ -2 & -\frac{6}{13} & \frac{87}{13} \end{bmatrix}, \qquad U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ 0 & -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$$

são matrizes de Householder. **[2.0]**

b) Determine a factorização QR da matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pelas matrizes de Householder U_1 e U_2. **[1.5]**

5. Considere a seguinte matriz simétrica e tridiagonal

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_1 & 0 & \beta_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \beta_{N-2} & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & \dots & \dots & \beta_{N-1} & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

onde $\beta_j \neq 0\,,\ \forall j$. Determine, em função de $N \geq 2$, o número de valores próprios positivos e negativos de T. O valor $\lambda = 0$ poderá ser um valor próprio? **[2.0]**

6. Considere o método multipasso linear

$$y_{n+2} + (a-1)\,y_{n+1} - a\,y_n = \frac{h}{4}\Big((3a+1)\,f_n + (a+3)\,f_{n+2}\Big)\,, \quad n \geq 0\,, \tag{1}$$

onde $f_n = f(t_n, y_n)$ e $a \in \mathbb{R}$ é um parâmetro.

a) Determine os valores de a de modo a garantir que o método (1) seja consistente de ordem dois, zero-estável e convergente. **[2.0]**

b) Aproxime a solução do problema de valor inicial

$$y'(t) = y(t)\,, \quad 0 < t < 1\,, \qquad y(0) = 1\,,$$

pelo método (1). Considere $a = -1, y_0 = y_1 = 1, t_0 = 0, t_j = t_{j-1} + h, j = 1, \dots, N$ e $Nh = 1$. Analise a convergência de y_N para $y(1)$ quando $h \to 0$. **[1.5]**

7. Considere o método do ponto médio

$$y_{n+2} - y_n = 2\,h\,f_{n+1}\,, \qquad n \geq 0\,, \tag{2}$$

onde $f_{n+1} = f(t_{n+1}, y_{n+1})$. Mostre que a fronteira da região de estabilidade absoluta do método (2) é dada pelo conjunto

$$\left\{\overline{h} \in \mathbb{C} \,:\, \overline{h} = \mathrm{i}\beta\,, \beta \in [-1, 1]\right\}\,.$$

Qual é a região de estabilidade absoluta do método. **[2.0]**

8. Considere o seguinte método de Runge-Kutta

$$\begin{aligned} &y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\Big(k_1 + k_2\Big)\,, \quad n \geq 0\,, \\ &k_1 = f\left(t_n\,, y_n + \frac{h}{2}\Big(k_1 - k_2\Big)\right)\,, \quad k_2 = f\left(t_n + h, y_n + \frac{h}{2}\Big(k_1 + k_2\Big)\right)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

a) Determine a ordem do método (3). Mostre que a sua função de estabilidade é dada por

. $$R(z) = \frac{2}{2 - 2z + z^2}\,.$$ **[1.5]**

b) Considere o conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z = 0\,, \ \ \mathrm{Re}\, z < 0\}$. Mostre que S faz parte da região de estabilidade absoluta do método (3). **[1.5]**