Análise Matemática III A – Ficha 9

Teorema de Stokes

1. Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ z < 4\}$.

   (a) Escreva uma parametrização g para M recorrendo às coordenadas cartesianas.

   (b) Escreva uma parametrização h para M recorrendo às coordenadas cilíndricas.

   (c) Se $\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, qual a relação entre $g^*\omega$ e $h^*\omega$?

2. Considere a seguinte variedade com bordo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z = 1,\ z \geq 0\}$.

   (a) Qual o bordo ∂M de M?

   (b) Determine uma forma μ que induza uma orientação em $\mathring{M} = M \setminus \partial M$.

   (c) Determine uma forma ν que induza uma orientação em ∂M compatível com μ.

   (d) Interprete (b) e (c) geometricamente.

3. Repita o exercício anterior para as seguintes variedades com bordo:

   (a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

   (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1\}$;

   (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ |z| \leq 2\}$;

   (d) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;

   (e) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + (y - 2)^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 16\}$;

   (f) $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 1\}$.

4. Usando o Teorema de Stokes, calcule $\displaystyle\int_{M^\mu} \omega$ onde:

   (a) $\omega = xdx + dy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y = 6,\ 0 \leq y \leq 2\}$, $\mu = dx$;

   (b) $\omega = xdx + dy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 = 6\}$, $\mu = -ydx + xdy$;

   (c) $\omega = ydx \wedge dy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 3(y - 1)^2 \leq 6\}$, $\mu = dx \wedge dy$;

   (d) $\omega = (x + 1)dy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3(y - 1)^2 = 6\}$, $\mu = (y - 1)dx - xdy$;

   (e) $\omega = ydx \wedge dz + \mathrm{e}^x\, dx \wedge dy$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1\}$, com uma orientação à sua escolha;

   (f) $\omega = xydx \wedge dy \wedge dz$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 < 1\}$, $\mu = -dx \wedge dy \wedge dz$;

   (g) $\omega = ydy \wedge dz + 2zdz \wedge dx + dx \wedge dy$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ -1 < z < 1\}$, com uma orientação à sua escolha;

   (h) $\omega = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z > 0\}$, $\mu = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$;

   (i) $\omega = 2ydy \wedge dz + z\,\mathrm{e}^{z^2}\, dz \wedge dx + dx \wedge dy$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ z < 0\}$, $\mu = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$;

   (j) $\omega = dx \wedge dy \wedge dz + wdx \wedge dy \wedge dw$, $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 4,\ w < 0\}$, $\mu = xdy \wedge dz \wedge dw - ydx \wedge dz \wedge dw + zdx \wedge dy \wedge dw - wdx \wedge dy \wedge dz$.

5. (a) Seja $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ uma forma-k exacta, e sejam α e β dois potenciais para ω. Mostre que $\beta = \alpha + d\eta$ para alguma forma $\eta \in \Omega^{k-2}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo vectorial conservativo, e sejam φ e ψ dois potenciais para F. Mostre que $\varphi = \psi + K$ para alguma constante $K \in \mathbb{R}$.

(c) Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial rotacional, e sejam A e B dois potenciais vectores para F. Mostre que $A = B + \nabla f$ para algum campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sugestão: Use o resultado da alínea (a).

6. Um campo vectorial $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 diz-se *fechado* se a forma $\omega_F \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ é fechada. Mostre que F é fechado sse

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \qquad \forall\ i \neq j\ .$$

7. Calcule o trabalho de F ao longo da curva C com a orientação indicada:

(a) $F(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1,\ x \geq 0\}$ no sentido crescente dos yy;

(b) $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$, C é interseção do cone de equação $z^2 = x^2 + y^2$ com o plano $z = 1 + \frac{x}{2}$, num sentido à sua escolha;

(c) $F(x,y,z) = (yz + 1, xz, xy)$, $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ 0 \leq z \leq 5\}$ no sentido decrescente dos xx;

(d) $F(x,y) = (\mathrm{e}^y, x\,\mathrm{e}^y)$, C é a espiral parametrizada por $g(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\operatorname{sen}(t))$, $t \in [0, 4\pi]$, com a orientação induzida por g.

8. Use o Teorema de Stokes para calcular o integral de linha de F ao longo da curva C percorrida no modo indicado:

(a) $F(x,y,z) = (2z, x, 3y)$, C é a intersecção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $z = x$ percorrida no sentido directo quando observada do ponto $(0,0,10)$;

(b) $F(x,y,z) = (y^2, z^2, x^2)$, C é a intersecção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 2y$ com o plano $z = y$ percorrida no sentido directo quando observada do ponto $(0,0,10)$;

9. Considere a variedade $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 3 - \sqrt{x^2+z^2},\ 1 < y < 2\}$ e o campo vectorial $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (x\,\mathrm{e}^y, -2\,\mathrm{e}^y, z\,\mathrm{e}^y)$. Calcule o fluxo $\displaystyle\int_M F \cdot n$ segundo a normal unitária n com segunda componente negativa usando:

(a) a definição de fluxo;

(b) o Teorema da Divergência;

(c) o Teorema de Stokes.

10. Repita o exercício anterior para $F(x,y,z) = (y, x, 2)$, $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2 + \operatorname{sen}(z),\ 0 < z < 2\pi\}$ e normal unitária n satisfazendo $n(\sqrt{3}, 0, \frac{\pi}{2}) = (1,0,0)$.

11. Calcule o fluxo de F através da superfície S segundo a normal unitária n, onde:

(a) $F(x,y,z) = (x + \operatorname{arctg}(y^2+z^2), \mathrm{e}^{z-x^3}, z^2 - z + 1)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0,\ z^2 + (\sqrt{x^2+y^2} - 2)^2 = 1\}$, normal n com terceira componente positiva;

(b) $F(x,y,z) = (yz, 2xz\,\mathrm{e}^{z^2}, 2xy\,\mathrm{e}^{y^2})$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2,\ x < 4\}$, normal n com primeira componente positiva;

(c) $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9,\ -1 < z < 4\}$, normal n satisfazendo $n(3,0,1) = (1,0,0)$;

(d) $F(x,y,z) = (x^2+y^2)(x,y,0)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 25 - x^2 - y^2,\ z > 0\}$, normal n satisfazendo $n(0,0,5) = (0,0,-1)$;

(e) $F = \mathrm{rot}(A)$ com $A(x,y,z) = (zx^2, y+z, z\cos^4(x+y^2))$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^3 = x^2+y^2,\ 1 < z < 2\}$, normal n com terceira componente negativa;

(f) $F(x,y,z) = (2yz-2z, 2xz-2z, 2)$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \mathrm{sen}(x^2+y^2-\pi),\ \pi < x^2+y^2 < 2\pi\}$, normal n satisfazendo $n(\frac{\sqrt{3\pi}}{2}, \frac{\sqrt{3\pi}}{2}, 1) = (0,0,1)$.

Sugestão: use o Teorema da Divergência ou o Teorema de Stokes para campos vectoriais.

12. Seja D uma região em $\mathbb{R}^2$ cuja fronteira ∂D é uma variedade-1 (excepto possivelmente num número finito de pontos). Seja $F = (P,Q)$ um campo vectorial de classe C^1 definido num aberto contendo $D \cup \partial D$. Usando o Teorema de Stokes para formas diferenciais, prove o Teorema de Green:

$$\int_{\partial D} F \cdot dg = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ ,$$

onde ∂D é percorrida de modo ao conjunto D ficar do lado esquerdo, i.e., a orientação em ∂D é induzida pela normal exterior.

13. Usando o Teorema de Green, calcule $\displaystyle\int_C F \cdot dg$ nos seguintes casos:

(a) $F(x,y) = (\frac{1}{1+x^2}, x)$, $C = C_1 \cup C_2$ onde C_i é a circunferência de raio i e centro na origem, C_1 é percorrida no sentido horário e C_2 no sentido anti-horário.

(b) $F(x,y) = \left(x\,\mathrm{e}^{-y^2}, -x^2 y\,\mathrm{e}^{-y^2} + \dfrac{1}{1+x^2+y^2} \right)$, C é a fronteira do quadrado definido por $|x| \leq a$ e $|y| \leq a$ ($a > 0$ constante), percorrida no sentido anti-horário.

14. Sejam P_1 e P_2 dois pontos distintos em $\mathbb{R}^2$. Seja F um campo vectorial fechado de classe C^1 definido em $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, P_2\}$. Sejam C_1 e C_2 duas circunferências contidas em U, de centros P_1 e P_2 respectivamente, e de raios suficientemente pequenos de modo à região limitada por cada C_i apenas conter P_i. Sabendo que

$$\int_{C_1} F \cdot dg = 2 \qquad \text{e} \qquad \int_{C_2} F \cdot dg = 5 \ ,$$

quando C_i é percorrida no sentido directo, calcule todos os valores possíveis para o trabalho da força F ao longo de variedades-1 compactas e contidas em U.

15. Seja $\omega \in \Omega^1\left(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}\right)$ a forma-1 dada por

$$\omega = \left(\frac{y}{(x-1)^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \right) dy \ .$$

(a) Mostre que ω é fechada.

(b) Determine se ω é exacta em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0),(1,0)\}$.

(c) Determine se ω é exacta em $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 > 4\}$.

16. Seja $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, $a > 0$ e considere a forma $\omega_a \in \Omega^2(U)$ dada por

$$\omega_a = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^a} dy \wedge dz + \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^a} dz \wedge dx + \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^a} dx \wedge dy \ .$$

(a) Determine para que valores de $a > 0$ a forma ω_a é fechada.

(b) Para o(s) valor(es) encontrados na alínea anterior, calcule $\int_S \omega_a$, onde $S \subset \mathbb{R}^3$ é a superfície esférica de raio 1 e centro na origem, com uma orientação à sua escolha.

(c) A forma ω_a é exacta em U? Justifique.