# Análise Matemática III A – Ficha 8

### Integrais em Variedades

1. Indique a dimensão e parametrize as seguintes variedades:
   (a) o arco da parábola $y = x^2$ em $\mathbb{R}^2$ entre os pontos $(-1, 1)$ e $(2, 4)$;
   (b) o segmento de recta em $\mathbb{R}^3$ que une os pontos $(1, -1, 0)$ e $(3, 2, 1)$;
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ onde $a$ e $b$ são constantes reais positivas;
   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4,\ z = \operatorname{sen}(x)\, e^y\}$;
   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x = y\}$;
   (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + 1 = x^2 + y^2,\ z = 2x\}$;
   (g) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ z < 4\}$;
   (h) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + 1 = x^2 + y^2,\ |z| < 1\}$;
   (i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1\}$;
   (j) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 + z^2 = 4\}$.

2. Calcule os integrais das formas diferenciais dadas ao longo das variedades indicadas:
   (a) $(x - y)dx + (x + y)dy$ ao longo de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$ percorrida no sentido anti-horário;
   (b) $xydx + dy$ ao longo de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y^2 = 1, x > -1\}$ orientada de modo a $(-1, -1)$ ser o ponto inicial e $(-1, 1)$ ser o ponto final;
   (c) $xydx + y^2dy$ ao longo de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 1, -1 < x < 3\}$ com uma orientção à sua escolha;
   (d) $ydx + zdy + xdz$ ao longo da intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$, percorrida uma vez no sentido horário quando vista da origem;
   (e) $xdx + z^2dy + y^2dz$ ao longo de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + \frac{1}{2}z = 1,\ x - 2y + 5z = 4,\ 0 < z < 2\}$, orientada de modo a $(2, -1, 0)$ ser o ponto inicial e $(-2, 2, 2)$ ser o ponto final.

3. Calcule os integrais das formas diferenciais dadas ao longo das variedades indicadas, com uma orientação à sua escolha:
   (a) $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ ao longo do triângulo de vértices $(3, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 6)$;
   (b) $xdy \wedge dz - ydx \wedge dz$ ao longo do hemisfério $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z > 0\}$;
   (c) $ydy\wedge dz - xdz\wedge dx + z^2dx\wedge dy$ ao longo de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z > 0,\ x^2+y^2 < 4\}$;
   (d) $dy\wedge dz + \log(1+x^2z^2)dz\wedge dx - zdx\wedge dy$ ao longo de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 = 1,\ -1 < y < 1\}$;
   (e) $zdz \wedge dx + 2zdx \wedge dy$ ao longo de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ x^2 + y^2 < 25\}$.

4. Decida, justificando, se as seguintes formas são exactas nos seus domínios. Em caso afirmativo, calcule um potencial.
   (a) $\omega = -\dfrac{x}{\sqrt{y - x^2}}dx + \dfrac{1}{2\sqrt{y - x^2}}dy$
   (b) $\omega = -\dfrac{y - 2}{x^2 + (y - 2)^2}dx + \dfrac{x}{x^2 + (y - 2)^2}dy$
   (c) $\omega = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}dx + \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}dy + \dfrac{z}{x^2 + y^2 + z^2}dz$
   (d) $\omega = \left(\dfrac{z}{x^2 + z^2} - \dfrac{y}{(x - 1)^2 + y^2}\right)dx + \dfrac{x - 1}{(x - 1)^2 + y^2}dy - \dfrac{x}{x^2 + z^2}dz$
   (e) $\omega = \dfrac{2xz}{x^2 + y^2}dx + \dfrac{2yz}{x^2 + y^2}dy + \log(x^2 + y^2)dz$

5. Esboce as curvas dadas e calcule

   (a) o comprimento de $\{(\cos t, \operatorname{sen} t, t) \in \mathbb{R}^3 : 0 < t < 4\pi\}$;

   (b) a massa de um filamento com a forma da curva descrita na alínea anterior, sabendo que a densidade de massa é dada por $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;

   (c) o comprimento de $\{(\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < t < 3\pi\}$.

6. Considere um filamento homogéneo semicircular de raio $a > 0$ em $\mathbb{R}^2$.

   (a) Mostre que o centróide se encontra no eixo de simetria a uma distância $\frac{2a}{\pi}$ do centro.

   (b) Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo definido pelos extremos do filamento é $\frac{1}{2}Ma^2$ onde $M$ designa a massa do filamento.

7. Calcule:

   (a) a área do parabolóide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = (x-2)^2 + (y-1)^2, z < 4\}$;

   (b) o momento de inércia em relação ao eixo dos $zz$ de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + y,\ x^2 + y^2 < 9\}$, sabendo que a densidade de massa é constante e igual a 1;

   (c) o integral da função $f(x, y, z) = z^2 + 1$ ao longo da superfície $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ x^2 + y^2 > 9\}$;

   (d) a coordenada $z$ do centróide de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2,\ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$.

8. Considere uma película homogénea representada por uma superfície esférica de raio $a > 0$ em $\mathbb{R}^3$. Mostre que o momento de inércia em relação a qualquer eixo contento o centro da esfera é $\frac{2}{3}Ma^2$ onde $M$ designa a massa da película.

9. Calcule o trabalho da força $F$ ao longo da curva $C$ com a orientação indicada:

   (a) $F(x, y) = (y^2, x^2)$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 = 36\}$ no sentido horário;

   (b) $F(x, y) = (x^2, 1)$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{sen}(x) + 1 = y, 0 < x < \pi\}$ no sentido crescente dos $xx$;

   (c) $F(x, y, z) = (y, z, x)$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy,\ x^2 + y^2 = 1\}$ percorrida uma vez no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, 100)$.

   (d) $F(x, y, z) = (y^2, x, yz)$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + 1 = x^2 + y^2,\ z = x + 2,\ z < 3\}$ orientada de modo a $(1, 3, 3)$ ser o ponto inicial e $(1, -3, 3)$ o ponto final;

   (e) $F(x, y, z) = (y, -2z, x^2)$, $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 + 1 = x^2 + y^2,\ z = \frac{1}{2}x\}$ percorrida no sentido anti-horário quando vista do ponto $(0, 0, -500)$.

   Note que as curvas das alíneas 9(d), 9(e) e 1(f) são obtidas intersectando um hiperbolóide com um plano, mas no entando são cónicas de tipos diferentes.

10. Calcule o fluxo de $F$ através da superfície $S$ segundo a normal indicada:

    (a) $F(x, y, z) = (z^2, \mathrm{e}^x, xy)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x > 0,\ y > 0, z > 0\}$, normal unitária com a primeira componente positiva;

    (b) $F(x, y, z) = (x, y, \operatorname{arctg}(x^2 + y^2))$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ -1 < z < 1\}$ normal unitária $n$ satisfazendo $n(1, 1, 0) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$;

    (c) $F(x, y, z) = (-x, 0, yz)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 2 < z < 5\}$, normal unitária com a terceira componente negativa;

    (d) $F(x, y, z) = (1, 2, z)$, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 25,\ z > 3\}$, normal unitária com a terceira componente positiva.