Análise Matemática III A – Ficha 7

Formas Diferenciais

1. Calcule a derivada exterior das seguintes formas diferenciais:

   (a) $\cosh(x)\operatorname{arctg}(y+z) \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$;

   (b) $\mathrm{e}^{x\cos^2(x)}\,dx + xyzdy + x^3zdz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$;

   (c) $xz^2dx \wedge dy + y^3zdx \wedge dz + xyzdy \wedge dz \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$;

   (d) $xy\,\mathrm{e}^z + \operatorname{sen}(xy)\cos(z) \in \Omega^0(\mathbb{R}^3)$;

   (e) $xyz(dx \wedge dy + dx \wedge dz + dy \wedge dz) \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$;

   (f) $x^2\cos(z)dx \wedge dy + y^3w^4dy \wedge dz + \mathrm{e}^x\operatorname{sen}(y)dz \wedge dw + 4dx \wedge dw \in \Omega^2(\mathbb{R}^4)$.

2. Calcule os *pull-backs* das seguintes formas diferenciais pelas funções indicadas:

   (a) $y^2dx + x^2dy + z^2dz$ por $(x,y,z) = g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$;

   (b) $-ydx + xdy$ por $(x,y) = g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$;

   (c) $dx \wedge dy \wedge dz$ por $(x,y,z) = g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$;

   (d) $zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx$ por $(x,y,x) = g(x,y) = (x,y,x^2+y^2)$;

   (e) $yzdx + xzdy + xydz$ por $(x,y,z) = g(\theta,\varphi) = (\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \cos\varphi)$;

   (f) $dx \wedge dy \wedge dz$ por $(x,y,z) = g(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\operatorname{sen}\varphi\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, \rho\cos\varphi)$.

3. Prove as seguintes propriedades:

   (a) $g \wedge \omega = g\omega$, para $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n) = \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ e $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;

   (b) $d^2\omega = 0$, para qualquer $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$;

   (c) $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$, para $\omega \in \Omega^k(\mathbb{R}^n)$ e $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe C^∞.

4. Sejam $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções de classe C^∞. Mostre que

$$g^*(fdx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (f \circ g)\det(Dg)dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n\ .$$

5. Decide se as seguintes formas diferenciais são exactas. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

   (a) $y\,\mathrm{e}^{xy}\,dx + x\,\mathrm{e}^{xy}\,dy$;

   (b) $xydx + x^2dy + zdz$;

   (c) $zdx \wedge dy + x^2dy \wedge dz$;

   (d) $\sum_{i=1}^{n} x_idx_i$;

   (e) $\mathrm{e}^z\cos(x)dx \wedge dy - \mathrm{e}^z\operatorname{sen}(x)dy \wedge dz + x^2\,\mathrm{e}^z\,dx \wedge dz$;

   (f) $(xyz + (x+y+z)^2)dx \wedge dy \wedge dz$.

6. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um campo escalar de classe C^1 e $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1. O *rotacional* de F é o campo vectorial definido por

$$\operatorname{rot}(F) = \nabla \times F = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right),$$

e a *divergência* de F é o campo escalar definido por

$$\operatorname{div}(F) = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \ ,$$

onde $F = F_1 e_1 + F_2 e_2 + F_3 e_3$. Associa-se ainda ao campo vectorial F uma forma-1, ω_F, e uma forma-2, Ω_F, definidas por

$$\omega_F = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz \qquad \text{e} \qquad \Omega_F = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy \ .$$

(Compare com o exercício 10 da ficha 6.) Mostre que:

(a) $df = \omega_{\nabla f}$;

(b) $d\omega_F = \Omega_{\nabla \times F}$;

(c) $d\Omega_F = (\nabla \cdot F) dx \wedge dy \wedge dz$;

(d) $\nabla \times (\nabla f) = 0$, se f é de classe C^2 (ou $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$);

(e) $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$, se F é de classe C^2 (ou $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(F)) = 0$).

7. Um campo vectorial $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 diz-se um *gradiente* (ou um *campo conservativo*) se existir um campo escalar $\varphi : D \to \mathbb{R}$ (dito *potencial* de F) tal que $F = \nabla\varphi$. Determine se os campos vectoriais seguintes são gradientes. Em caso afirmativo, calcule um potencial.

(a) $F(x, y) = (xy^2, x^2 y)$;

(b) $F(x, y, z, w) = (y, z, w, x)$;

(c) $F(x, y, z) = (y, x, z)$.

8. Um campo vectorial $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 diz-se um *rotacional* se existir um campo vectorial $A : D \to \mathbb{R}^3$ (dito *potencial vector* de F) tal que $F = \nabla \times A$. Determine se os campos vectoriais seguintes são rotacionais. Em caso afirmativo, calcule um potencial vector.

(a) $F(x, y, z) = (y, x, z)$;

(b) $F(x, y, z) = (z, x, y)$;

(c) $F(x, y, z) = (\cos y, \mathrm{e}^z, \operatorname{sen} x)$.