Análise Matemática III A – Ficha 6

Tensores e Covectores

Notação: Nesta ficha, $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ denota a base canónica de $\mathbb{R}^n$, e $\{e_i^*\}_{i=1,\dots,n} \subset (\mathbb{R}^n)^*$ denota a base dual.

1. Decida, justificando, se as seguintes funções são tensores, ou covectores, ou nem uma coisa nem outra:

   (a) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad T(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 - 5x_2 + 2x_4$;

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(u, v) = x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$;

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(u, v) = x_1y_2 + x_2y_1$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$;

   (d) $T : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, \quad T(u, v) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3$, onde $u = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $v = (y_1, y_2, y_3, y_4)$;

   (e) $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad T(u, v, w) = x_1y_3z_2 - x_3z_1 + z_4$, onde $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$ e $w = (z_1, z_2)$;

   (f) $T : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad T(u, v, w) = x_1y_2z_3$, onde $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $w = (z_1, z_2, z_3)$.

2. Mostre que os covectores-1 $e_1^*, \dots, e_n^* \in (\mathbb{R}^n)^*$ são linearmente independentes.

3. Mostre que, se $S, T : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$ são multilineares e $a, b \in \mathbb{R}$, então $aS + bT$ também é multilinear.

4. Prove as seguintes propriedades do produto tensorial:

   (a) $\lambda(S \otimes T) = (\lambda S) \otimes T = S \otimes (\lambda T)$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{R}, S \in T^k(\mathbb{R}^n), T \in T^l(\mathbb{R}^n)$;

   (b) $(S \otimes T) \otimes U = S \otimes (T \otimes U)$, para quaisquer $S \in T^k(\mathbb{R}^n), T \in T^l(\mathbb{R}^n), U \in T^m(\mathbb{R}^n)$.

5. Escreva cada um dos seguintes tensores-3 em $\mathbb{R}^4$ como uma combinação linear dos elementos da base $\{e_i^* \otimes e_j^* \otimes e_k^*\}_{i,j,k=1,2,3,4}$, e calcule $T(e_1, e_2, e_3)$:

   (a) $T(u, v, w) = 3x_1y_2z_3 + x_4y_1z_3 - 2x_2y_4z_1$, onde $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $u = (z_1, z_2, z_3)$;

   (b) $T = (e_1^* + 2e_2^* + 4e_4^*) \otimes (e_1^* \otimes e_4^* - \frac{3}{2}e_1^* \otimes e_1^*)$;

   (c) $T = S \otimes R$, onde $S = e_1^* + 2e_3^*$ e $R = 5e_2^* \otimes e_3^* + \sqrt{2}e_1^* \otimes e_2^*$;

   (d) $T = R \otimes S$, onde S e R são os tensores definidos na alínea anterior;

   (e) $T = (e_1^* + 3e_2^* - e_4^*) \otimes \frac{1}{2}e_1^* \otimes (\pi e_3^* - 7e_1^*)$.

6. Prove que $\text{Alt}(T) \in \Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ para todo o $T \in T^k(\mathbb{R}^n)$.

7. Calcule $\text{Alt}(e_1^*)$, $\text{Alt}(e_1^* \otimes e_2^*)$, $\text{Alt}(e_2^* \otimes e_1^*)$ e $\text{Alt}(e_1^* \otimes e_1^*)$.

8. Qual a dimensão dos seguintes espaços vectoriais:

   (a) $T^2(\mathbb{R}^2)$, (b) $\Lambda^2(\mathbb{R}^2)$, (c) $\Lambda^1(\mathbb{R}^4)$, (d) $\Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, (e) $\Lambda^5(\mathbb{R}^5)$.

   Indique uma base para cada um deles.

9. Escreva cada um dos seguintes covectores-3 em $\mathbb{R}^4$ como uma combinação linear dos elementos da base $\{e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*,\ e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_4^*,\ e_1^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*,\ e_2^* \wedge e_3^* \wedge e_4^*\}$, e calcule $\omega(e_1, e_2, e_3)$:

   (a) $\omega(u, v, w) = x_1y_2z_4 - x_1y_4z_2 - x_2y_1z_4 + x_2y_4z_1 + x_4y_1z_2 - x_4y_2z_1$, onde $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$ e $u = (z_1, z_2, z_3)$;

   (b) $\omega = (e_1^* + 2e_2^* + 4e_4^*) \wedge (e_1^* \wedge e_4^* - \frac{3}{2}e_1^* \wedge e_1^*)$;

   (c) $\omega = \alpha \wedge \beta$, onde $\alpha = e_1^* + 2e_3^*$ e $\beta = 5e_2^* \wedge e_3^* + \sqrt{2}e_1^* \wedge e_2^*$;

   (d) $\omega = \beta \wedge \alpha$, onde α e β são os covectores definidos na alínea anterior;

   (e) $\omega = (e_1^* + 3e_2^* - e_4^*) \wedge \frac{1}{2}e_1^* \wedge (\pi e_3^* - 7e_1^*)$.

10. Dado o vector

$$a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

   define-se o covector-1

$$\omega_a = a_1e_1^* + a_2e_2^* + a_3e_3^* \in \Lambda^1(\mathbb{R}^3)$$

   e o covector-2

$$\Omega_a = a_1e_2^* \wedge e_3^* + a_2e_3^* \wedge e_1^* + a_3e_1^* \wedge e_2^* \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)\ .$$

   Mostre que

   (a) $\omega_a \wedge \omega_b = \Omega_{a\times b}$, onde "$\times$" designa o produto externo de vectores em $\mathbb{R}^3$;

   (b) $\omega_a \wedge \Omega_b = (a \cdot b)\ e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^*$, onde "$\cdot$" designa o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$.

11. Sejam $v_1, \dots v_n \in \mathbb{R}^n$. Usando a definição de produto exterior, mostre que

$$e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*(v_1, \dots, v_n) = \det \begin{bmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{bmatrix} .$$

   Sugestão: recorde que, se A é uma matriz $n \times n$ de entradas $\{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,n}$, então $\det(A) = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, onde Σ_n é o conjunto de todas a permutações de n elementos.

12. (Mudança de bases) Sejam $\{v_i\}_{i=1,\dots,n}$ e $\{w_i\}_{i=1,\dots,n}$ duas bases de $(\mathbb{R}^n)^*$. Seja S a matriz mudança de base, de entradas $\{s_{ij}\}_{i,j=1,\dots n}$, i.e. as entradas de S satisfazem as relações $w_i = \sum_{j=1}^n s_{ij}v_j$. Mostre que

$$w_1 \wedge \cdots \wedge w_n = \det(S)v_1 \wedge \cdots \wedge v_n\ .$$