Análise Matemática III A – Ficha 5

Exercícios sobre integrais múltiplos

1. Considere o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq x + 1\}$.
   (a) Escreva a expressão para o volume de A nas ordens de integração $\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ e $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.
   (b) Calcule o volume de A.

2. Repita o exercício anterior para o conjunto
   $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| + 2|y| \leq 1,\ 0 \leq z \leq 3 - x - 2y\}$.

3. Calcule o volume das seguintes regiões:
   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 - 1 \leq z \leq 3\}$;
   (b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 - 4z^2 \geq 1\}$;
   (c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, 1 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$;
   (d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

4. Calcule o centróide da região R onde:
   (a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ -y \leq x \leq y\}$;
   (b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 1\}$.

5. Considere o sólido $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2,\ z \leq x^2 + y^2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$ e suponha que A tem densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Determine a massa e a coornada z_{CM} do centro de massa de A.

6. Considere o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x + y\}$.
   (a) Escreva a expressão para o volume de A nas ordens de integração $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.
   (b) Calcule o momento de inércia de A relativo ao eixo dos zz, considerando a densidade de massa constante e igual a um.

7. Calcule o integral $\int_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, onde D é a região definida por
   $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq \sqrt{3}x,\ z \geq \sqrt{3(x^2 + y^2)}\}$.

8. Considere o sólido $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x + y \leq 3,\ 0 \leq z \leq 2xy\}$. Escreva a expressão do volume de A na ordem de integração $\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}dx$ e calcule-o.

9. Calcule o integral triplo $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{1-(x^2+z^2)}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$.

10. Calcule o volume de
    $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}\ ,$$
    usando coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas.

11. Seja $R \subset \mathbb{R}^2$ uma região plana, situada no semiplano $x > 0$, com centróide $(\bar{x}, \bar{y})$. Mostre que o volume do sólido de revolução $S \subset \mathbb{R}^3$ que se obtém quando se roda R de 2π graus radianos em torno do eixo dos yy é dado por
    $$\mathrm{vol}(S) = 2\pi\bar{x}A(R)\ ,$$
    onde $A(R)$ é a área de R.