Análise Matemática III A – Ficha 4

Teorema de Fubini. Mudança de variáveis de integração

1. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{2x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2-2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$;

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{2y^2-1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$; (d) $\displaystyle\int_0^\pi \int_{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}}^{\operatorname{sen} x} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

   Nota: As regiões de integração dos integrais das alíneas (a) a (c) já foram estudadas no exercício 8 da ficha 3.

2. Escreva os seguintes integrais nas ordens de integração $\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\frac{x^2}{2}}^{x^2} \int_0^{x^2} f(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

   Nota: As regiões de integração destes integrais já foram estudadas no exercício 9 da ficha 3.

3. Considere o sólido S e escreva o integral do volume de S, $\iiint_S 1$, como um integral iterado numa ordem de integração à sua escolha:

   (a) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{y^2+z^2} \leq x \leq 2 - y^2 - z^2\}$;
   (b) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2z^2 \leq y \leq 1 + x^2 + z^2\}$.

   Sugestão: Em cada uma das alíneas, existe uma ordem de integração na qual o volume de S se escreve como um único integral iterado. Tente encontrá-la.

4. Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

   Prove que f não é integrável no conjunto $[0,1] \times [0,1]$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(1-y)^c}{(x-y)^c} & \text{se } 0 < x < 1 \text{ e } 0 < y < x \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   onde $c \in]0,1[$. Prove que f é integrável en $\mathbb{R}^2$ e calcule o seu integral.

6. Esboce as regiões de integração e calcule os integrais:

   (a) $\displaystyle\iint_S \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, onde $S = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$;

   (b) $\displaystyle\iint_S \mathrm{e}^{x+y}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, onde $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_y^x x\, \mathrm{e}^{z^2}\, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$;

   (d) $\displaystyle\iiint_S \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, onde S é a região limitada pelos três planos coordenados e pelo plano $x + y + z = 1$.

7. Calcule o centróide da região $S \subset \mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas:

   (a) $y = \operatorname{sen}^2 x$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = \pi$;

   (b) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$ e $y = 0$.

8. Seja S uma placa fina, plana, de massa m. Sejam L_0 e L duas rectas paralelas, pertencentes ao plano que contém S, a uma distância h uma da outra, com L_0 a passar pelo centro de massa de S. Prove que os momentos de inércia de S em relação a L e a L_0 satisfazem a fórmula $I_L = I_{L_0} + mh^2$.

9. Usando coordenadas polares, calcule os seguintes integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x + y}{x^2 + y^2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x$;

   (b) $\displaystyle\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} x^2 + y^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

10. Usando coordenadas cilíndricas, calcule:

    (a) a massa do sólido $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ |z| \leq 1\}$, sabendo que a densidade de massa é $\sigma(x, y, z) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$;

    (b) o volume da região definida na pergunta 9(e) da ficha 3:
    $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2+y^2 \leq z^2+1,\ 4x^2+4y^2+4z^2 \geq 1\}$;

    (c) o volume das duas regiões definidas na pergunta 3;

    (d) o volume da região $S \subset \mathbb{R}^3$ limitada pelo cone $z^2 = x^2 + 4y^2$ e pelo parabolóide $z = 2x^2 + 8y^2$. Sugestão: Use coordenadas cilíndricas elípticas (r, θ, z), onde $(x, y, z) = (ar \cos\theta, br \operatorname{sen}\theta, z)$, e a e b são constantes positivas a determinar pelo problema.

11. Usando coordenadas esféricas, calcule:

    (a) a coordenasa $\bar{z}$ do centróide de $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq x \leq y,\ 0 \leq z \leq 1\}$;

    (b) o momento de inércia de $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$ em relação ao eixo dos zz, sabendo que a densidade de massa é $\sigma(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$;

(c) o volume do elipsóide $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ (a, b, c constantes positivas).

12. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ a região limitada pelas rectas $x = 0$, $y = 0$ e $x + y = 1$. Usando uma mudança de coordenadas apropriada, calcule o integral

$$\iint_A \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x-y}{x+y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

13. Prove as seguintes relações:

(a) $\displaystyle\iint_A f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$;

(b) $\displaystyle\iint_B f\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{f(u)}{2u}\mathrm{d}u$,
onde $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 2,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 2, x > 0,\ y > 0\}$;

(c) $\displaystyle\iint_C f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \log 2 \int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$, onde C é a região do primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

14. Em cada uma das alíneas, defina uma mudança de variáveis tal que o integral indicado se exprime, nas novas coordenadas, como um integral iterado de limites de integração constantes. Use essa mudança de variáveis para calcular o valor do integral.

(a) $\displaystyle\iint_A \frac{x^2+y^2}{(x^2-y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, onde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < xy < 1,\ x > \sqrt{1+y^2}\}$;

(b) $\displaystyle\iint_B \frac{\sqrt{y}}{x}\left(x + \frac{x^3}{4y^2}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$,
onde $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2,\ 1 \leq x^2 + 2y^2 \leq 2,\ x \geq 0\}$.

15. Seja $B^n(R) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R\}$ a bola em $\mathbb{R}^n$ de centro na origem e raio $R > 0$ e seja $V_n(R)$ o volume n-dimensional de $B^n(R)$.

(a) Mostre que $V_n(R) = R^n V_n(1)$.

(b) Mostre que $V_{n+2}(1) = \frac{2\pi}{n+2} V_n(1)$. Sugestão: Comece por verificar que

$$B^{n+2}(1) = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : (x_1, x_2) \in B^2(1),\ (x_3, \ldots, x_{n+2}) \in B^n(\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2})\} \ .$$

(c) Mostre que

$$V_n(R) = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n}{2}} R^n}{n(n-2)\cdots 4 \cdot 2} & \text{se } n \text{ é par} \\[2ex] \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} R^n}{n(n-2)\cdots 3 \cdot 1} & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$