Análise Matemática III A – Ficha 3

Medida e Integral de Lebesgue. Esboços de conjutos

1. Prove que, se A e B são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ mensuráveis, então $A \cap B$ também é mensurável.

2. Prove que um subconjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$ não tem medida nula.

3. Decida, justificando, se os seguintes conjuntos têm medida nula:

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0,\ 3x - y + z = 0\}$;
   (b) uma recta em $\mathbb{R}^2$;
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
   (d) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0\}$;
   (e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$;
   (f) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = q,\ q \in \mathbb{Q}\}$;
   (g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{1}{n} + \frac{1}{m},\ x \notin \mathbb{Q},\ n, m \in \mathbb{N}\}$;
   (h) $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : w = e^{x - y\,\mathrm{sen}(z)}\}$.

4. Dê um exemplo de um conjunto limitado de medida nula cuja fronteira não tenha medida nula.

5. Seja $A_0 = [0, 1]$. Dividindo A_0 em três partes iguais e retirando-lhe o intervalo aberto do meio $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$, obtém-se o conjunto $A_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Repetindo o processo, retirando o terço do meio aos intervalos $[0, \frac{1}{3}]$ e $[\frac{2}{3}, 1]$, obtém-se o conjunto $A_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$. Continuando, obtém-se uma sucessão de conjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Seja $C = \bigcap\limits_n A_n$.

   (a) Prove que C tem medida nula.
   (b) Prove que C não é numerável.

   Nota: Ao conjunto C chama-se *conjunto de Cantor*. É um exemplo de um subconjunto de $\mathbb{R}$ com medida nula que não é numerável.

6. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que o conjunto

$$f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = c\}$$

   é mensurável para todo o real $c \in \mathbb{R}$.

7. Mostre que a função $f : [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \mathrm{sen}(xy) + \cos(yz) & \text{se } xyz \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   é integrável e calcule o seu integral.

8. Esboce os seguintes conjuntos:

   (a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 2x^2\}$;
   (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1,\ x^2 - 2 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$;
   (c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1,\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq 2y^2 - 1\}$;
   (d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1,\ -\frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 \leq \frac{1}{2}\}$.

9. Esboce os seguintes conjuntos e determine os cortes segundo planos perpendiculares aos eixos dos xx e dos zz.

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x + y\}$;
   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$;
   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 2y^2 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2\}$;
   (d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2,\ 0 \leq z \leq x^2\}$;
   (e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2 + 1,\ 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 \geq 1\}$.