Análise Matemática III A – Ficha 2

Variedades em $\mathbb{R}^n$

1. Mostre que os seguintes conjuntos são variedades e determine a sua dimensão.

   (a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$;

   (b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos(z),\ y = \operatorname{sen}(z)\}$;

   (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9,\ x - y + 3z = 0\}$;

   (d) $\{(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ w^2 - 3x^2 + y^2 - z^2 + \frac{1}{2} = 0\}$.

2. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x,y) = x^2 - y^2$.

   (a) Esboce os conjuntos de nível $F^{-1}(c)$ para $c \in \mathbb{R}$.

   (b) Para que valores de c é que o conjunto $F^{-1}(c)$ é uma variedade?

3. Considere o conjunto

$$V_\alpha = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : [x^2 + 4(y^2 + z^2) - 1][4x^2 + \alpha(y^2 + z^2) - 1] = 0\}$$

   onde $\alpha > 0$. Decida para que valores de α é que V_α é uma variedade e determine a sua dimensão.

4. Considere o conjunto

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ((x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-3)((x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-3) = 0\}\ .$$

   Decida se V é uma variedade diferenciável bidimensional ou não. Em caso negativo determine a maior variedade bidimensional conexa contida em V e contendo o ponto $(2,2,2)$.

5. Consider os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$$C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (1 - \tfrac{1}{n+1})^2\}\ ,$$

   onde $n \in \mathbb{N}$, e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$.

   (a) Seja $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Mostre que M é uma variedade.

   (b) Mostre que $M \cup C$ não é uma variedade.

6. Determine uma base para o espaço tangente e para o espaço normal a cada uma das seguintes variedades nos pontos indicados:

   (a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$, em $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}(1, 1, 1)$;

   (b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = \cos(z),\ y = \operatorname{sen}(z)\}$, em $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4})$;

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 9,\ x - y + 3z = 0\}$, em $(3, 0, -1)$;

   (d) $\{(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ w^2 - 3x^2 + y^2 - z^2 + \frac{1}{2} = 0\}$, em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

7. Considere a variedade $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 4(y^2 + z^2) = 1\}$ e o ponto $p = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \in S$. Escreva as equações da recta normal a S em p e a equação do plano tangente a S em p.

8. Considere o conjunto $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2,\ x + e^y + z = 1\}$.

   (a) Mostre que L é uma variedade. Qual a sua dimensão?

   (b) Mostre que existe uma vizinhança U do ponto $(-1, 0, 1) \in L$ tal que $L \cap U$ é o gráfico de uma função na variável z.

9. Determine a distância do ponto $(1, 2, -1)$ à recta $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 2z\}$.

10. Sejam a e b dois números reais positivos fixos.

    (a) Determine os extremos de $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ restrita à condição $x^2 + y^2 = 1$.

    (b) Determine os extremos de $f(x, y) = x^2 + y^2$ restrita à condição $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

    Em ambos os casos, interprete o problema geometricamente.

11. Uma caixa rectangular, sem tampa, tem área igual a 16 m^2. Determine as dimensões da caixa que maximizam o seu volume.

12. Para cada um dos seguintes casos, determine os extremos da função f no conjunto C.

    (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1, \quad C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

    (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z, \quad C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^4}{9} \leq 1\}$;

    (c) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}$.

13. (Exercício de revisão de AMII) Determine e classifique os pontos de estacionaridade das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}^2$:

    (a) $f(x, y) = (y - x^2)(x - y^2) + 1$;

    (b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + 7$;

    (c) $f(x, y) = (x - y + 1)^2$;

    (d) $\operatorname{sen}(x) \cosh(y) \quad$ (recorde que $\cosh(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$).