Análise Matemática III A – Ficha 10

Integrabilidade. Teoremas de Convergência para o Integral de Lebesgue

1. Prove que a função $\frac{1}{x^\alpha}$ é integrável no intervalo $[1,+\infty[$ sse $\alpha > 1$.

2. Decida se as seguintes funções são ou não integráveis nos conjuntos indicados. Em caso afirmativo, calcule os integrais.

   (a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$, em $]0,1[$;

   (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}(|x|+1)}$, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$;

   (c) $f(x) = \log(\frac{1}{1-x})$, em $]0,1[$;

   (d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$, em $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$;

   (e) $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, em $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$.

3. Decida se as seguintes funções são ou não integráveis nos conjuntos indicados.

   (a) $f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$, em $]0,1[$;

   (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, em $]1,2[$;

   (c) $f(x) = \frac{\mathrm{sen}^2(\frac{1}{x})}{\sqrt{x}}$, em $]0,+\infty[$;

   (d) $f(x) = 1 - e^{-1/x^2}$, em $[1,+\infty[$;

   (e) $f(x) = x\,\mathrm{sen}(\frac{1}{x}) - 1$, em $[1,+\infty[$;

   (f) $f(x) = \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}$, em $[1,+\infty[$.

4. Esboce as seguintes curvas e calcule o seu comprimento.

   (a) $E = \{(\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{sen}(t), \mathrm{e}^{-t}\cos(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$;

   (b) $E = \{(\frac{1}{t}\,\mathrm{sen}(t), \frac{1}{t}\cos(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \geq 0\}$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

   (a) Decida se f é integrável em $\mathbb{R}^2$ e, em caso afirmativo, calcule $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} f$.

   (b) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

6. Calcule os seguintes limites ou prove que não exitem:

   (a) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x/k}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

   (b) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-|x|-|y|}\,\mathrm{sen}^k(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

   (c) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{2} \frac{\sqrt[k]{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

   (d) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x/k)}{1+x^2}\mathrm{d}x$;

   (e) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_0^{2\pi} \cos^k(\tfrac{1}{kx})\mathrm{d}x$;

   (f) $\displaystyle\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x^2+y^2)^{k/2}}{1+(x^2+y^2)^{(k+3)/2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7. Seja $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f_k(x) = \begin{cases} 4k^2 x & \text{se } 0 < x \leq \frac{1}{2k} \\ 4k - 4k^2 x & \text{se } \frac{1}{2k} < x < \frac{1}{k} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Calcule $\lim\limits_{k\to+\infty} f_k(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, e $\int_{\mathbb{R}} f_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Explique porque é que este exemplo não contradiz os Teoremas de Convergência Monotona ou Dominada.

8. Calcule a derivada das seguintes funções:

   (a) $F(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x} \mathrm{d}x$, $t \in \mathbb{R}$;

   (b) $F(t) = \displaystyle\int_0^{1} \log(x^2 + t^2) \mathrm{d}x$, $t \neq 0$;

   (c) $F(t) = \displaystyle\int_1^{t^3} \mathrm{e}^{-tx^2} \mathrm{d}x$, $t > 1$;

   (d) $F(t) = \displaystyle\int_{\log t}^{t} \frac{\mathrm{e}^{x^2 t^2}}{x} \mathrm{d}x$, $t > 1$;

9. Para cada $t > 0$, seja $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1 + x^2} \mathrm{d}x$.

   (a) Mostre que F está bem definida.

   (b) Mostre que se verifica a relação: $F''(t) + F(t) = \frac{1}{t}$.

10. Mostre que se verifica a seguinte igualdade:

$$\log(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-xt}}{x} \mathrm{d}x \qquad \forall\, t > 0 .$$

Sugestão: use a Regra de Leibniz.

11. Sejam $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ as funções definidas por:

$$f(t, x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \mathrm{e}^{-tx} \qquad \text{e} \qquad g(t) = \int_0^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}x .$$

Mostre que

(a) $g'(t) = -\dfrac{1}{1 + t^2}$; (b) $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 0$; (c) $\lim\limits_{r\to+\infty} \displaystyle\int_0^{r} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Compare o resultado de (c) com o exercício 3(f).

Sugestão para a alínea (c): Use (a) e (b) para concluir que $g(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(t)$, em seguida use o Teorema da Convergência Dominada para calcular $\lim_{t\to 0} \int_0^{+\infty} f(t, x)\, \mathrm{d}x$.