Análise Matemática III A – Ficha 1

Derivação em $\mathbb{R}^n$, Teoremas da Função Inversa e da Função Implícita

1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Seja $F(x,y) = f(x^3 - y, x^2 y)$. Sabendo que $\nabla f(2,-1) = (1,4)$, calcule $\nabla F(1,-1)$.

2. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^2. Seja $F(x,y) = f(x + g(y))$. Calcule todas as derivadas parciais de primeira e de segunda ordem da função F. Verifique a seguinte relação
$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} .$$

3. Sejam $x = r\cos(\theta)$, $y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$ e $g(r,\theta) = f(x,y)$ onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2.
   (a) Exprima $\frac{\partial g}{\partial r}$ e $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ em função das derivadas parciais de f.
   (b) Mostre que
   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} .$$
   (Nota: À expressão $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ chama-se *Laplaciano* de f, e denota-se por Δf.)

4. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções de classe C^1.
   (a) Mostre que $f \cdot g$ é uma função de classe C^1. ("$\cdot$"designa o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.)
   (b) Mostre que $\nabla(f \cdot g) = f^T Dg + g^T Df$. (Nota: "T"designa a transposta de uma matriz e um vector é representado por uma matriz coluna, portanto f^T é uma matriz linha.)

5. Seja $g :]0,+\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $g(r,\theta) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$.
   (a) Mostre que g é localmente invertível, i.e., que para qualquer $a \in]0,+\infty[\times \mathbb{R}$ existe uma vizinhança U contendo a na qual g é invertível.
   (b) Será g globalmente invertível? Justifique.
   (c) Sendo $(x,y) = g(r,\theta)$, calcule $Dg^{-1}(x,y)$.
   (d) Determine a imagem por g do conjunto $]1,3[\times]0,\pi[$.

6. Seja $f(x,y) = (\log(2 + xy), x^2 y^3)$.
   (a) Determine todos os pontos para os quais o Teorema da Função Inversa garante a existência de uma inversa local para f.
   (b) Será f globalmente invertível? Justifique.

(c) Calcule $Df^{-1}(0,-1)$ onde f^{-1} é a inversa local de f numa vizinhança do ponto $(1,-1)$.

7. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} u = xy + \operatorname{sen}(x+y) \\ v = e^{-x+y-2} + \dfrac{x}{y} \end{cases}$$

Mostre que existem vizinhanças de $(u,v) = (-1,0)$ e de $(x,y) = (-1,1)$ tais que o sistema define (x,y) como uma função de (u,v) desde que as variáveis estejam nessas vizinhanças. Calcule $\frac{\partial x}{\partial u}(-1,0)$.

8. Considere o sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 - y\cos(uv) = 0 \\ x^2 + y^2 - \operatorname{sen}(uv) + 2z^2 = 2 \\ xy - \operatorname{sen}(u)\cos(v) + z = 0 \end{cases}$$

Mostre que existem vizinhanças de $(x,y,z) = (1,1,0)$ e de $(u,v) = (\frac{\pi}{2},0)$ tais que o sistema define (x,y,z) como função de (u,v) nessas vizinhanças. Calcule $\frac{\partial x}{\partial u}$ e $\frac{\partial x}{\partial v}$ no ponto $(\frac{\pi}{2},0)$.

9. Considere a função $F(x,y,z) = x + z + (y+z)^2$. Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}^3$ onde o Teorema da Função Implícita garante que a equação $F(x,y,z) = 6$ define z em função de x e y, i.e. $z = f(x,y)$. Nos pontos desse conjunto, calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ em função de x, y e z.

10. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y,z) = \frac{1}{5}(x^5+y^5+z^5)+xyz$. Verifique que, numa vizinhança de $(1,0,0)$, a equação $F(x,y,z) = \frac{1}{5}$ define implicitamente x como função de y e de z, i.e. $x = f(y,z)$. Verifique que $(0,0)$ é ponto de estacionaridade de f e classifique-o.