

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE DE RECUPERAÇÃO 2 – 9 DE JANEIRO DE 2004

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(1) Considere o aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

(4 val.)

(a) Seja $\omega = 2zdx \wedge dy - 2ydx \wedge dz + 2xdy \wedge dz$.

Utilizando o teorema de Stokes, calcule $\int_{\partial U} \omega$ segundo a orientação dada pela normal a ∂U exterior a U .

(4 val.)

(b) Seja $\xi = z^2dx \wedge dy \wedge dz$.

Utilizando o teorema de Stokes, calcule $\int_U \xi$.

(2) Considere a forma-1, $\eta = \left(\frac{x}{x^2+y^2} + 3\right) dx + \left(\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{z}{(y-2)^2+z^2}\right) dy + \left(\frac{y-2}{(y-2)^2+z^2}\right) dz$.

(3.5 val.)

(a) Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ a circunferência de raio 5, centrada na origem, e assente no plano $x = z$.

Calcule $\int_C \eta$ segundo um sentido à sua escolha.

(3.5 val.)

(b) Seja γ o quarto de circunferência de raio 1, centrada em $(0, 2, 0)$, que une o ponto $(0, 1, 0)$ ao ponto $(0, 2, 1)$.

Calcule $\int_\gamma \eta$.

(2.5 val.)

(3) Uma massa m percorre uma trajectória parametrizada por $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, sob acção de uma força f . Utilizando a Lei de Newton $f = ma$, onde a é a aceleração, mostre que o trabalho realizado por f ao longo do movimento é igual à variação de energia cinética da massa.

(A energia cinética é dada por $\frac{m}{2} \|v\|^2$, onde v é o vector velocidade.)

(2.5 val.)

(4) Determine se a função $f(x, y) = \frac{1}{|1-x^2-y^2|^{1/2}} e^{-x^2-y^2}$ é integrável em \mathbb{R}^2 . Em caso afirmativo calcule um majorante para $\int_{\mathbb{R}^2} f$.