Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

2º Teste

19 de Dezembro de 2002

Duração: 1 hora e 30 minutos.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere a variedade

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2,\, y > 0,\, z < 1\}$$

e o campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x - z)$. Calcule o fluxo de $\mathbf{F}$ na direcção da normal unitária $\mathbf{n}$ cuja 3ª componente é negativa, usando

(3 val.) (a) o Teorema da Divergência

(3 val.) (b) o Teorema de Stokes para campos vectoriais

(3 val.) (c) a definição de fluxo

Resolução:

(a) Consideremos os conjuntos

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2 + y^2,\, y \geq 0,\, z \leq 1\} \\ T_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\, y \geq 0\, z = 1\} \\ T_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq x^2,\, y = 0\} \end{aligned}$$

Temos $\partial V = S \cup T_1 \cup T_2$. Aplicando o Teorema da Divergência em V, vem

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dV_2 + \iint_{T_1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dV_2 + \iint_{T_2} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dV_2 = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV_3 = 0,$$

onde $\boldsymbol{\nu}$ é a normal unitária exterior a V e usámos $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dV_2 &= -\iint_{T_1} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dV_2 - \iint_{T_2} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dV_2 \\ &= -\iint_{T_1} (x - z)\, dV_2 - \iint_{T_2} (-y)\, dV_2 \\ &= \mathrm{Vol}_2(T_1) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

onde usámos as igualdades $y = 0$, em T_2, e $\iint_{T_1} x\, dV_2 = 0$. Uma vez que $\nu^3 < 0$ em S, concluímos que

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu}\, dV_2 = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Notando que

$$\Omega_{\mathbf{F}} = zdy \wedge dz + ydz \wedge dx + (x - z)dx \wedge dy = d\left(yzdz + yzdx + \frac{x^2}{2}dy\right),$$

concluímos que $\mathbf{A} = (yz, \frac{x^2}{2}, yz)$ é um potencial vector para $\mathbf{F}$, ou seja, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{F}$. Aplicando o Teorema de Stokes para campos vectoriais, vem

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \iint_{\overline{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \iint_{\overline{S}} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial \overline{S}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g},$$

onde $\overline{S}$ denota o fecho de S e $\mathbf{g}$ percorre $\partial\overline{S}$ no sentido directo em relação ao ponto $(0, 10^{10}, 0)$. Temos $\partial\overline{S} = C_1 \cup C_2$, onde

$$C_1 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0,\ z = 1\right\},$$
$$C_2 = \left\{(x, 0, x^2) \mid x \in [-1, 1]\right\}.$$

Considerando as parametrizações $\boldsymbol{\alpha}_1(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$, $\theta \in [0, \pi]$, e $\boldsymbol{\alpha}_2(t) = (t, 0, t^2)$, $t \in [-1, 1]$, para C_1 e C_2 respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial S} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{g} &= -\int_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_1 - \int_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &= -\int_0^{\pi} \left(\operatorname{sen}\theta d(\cos\theta) + \frac{\cos^2\theta}{2} d(\operatorname{sen}\theta)\right) - \int_{-1}^{1} 0\, dt \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(c) Consideremos a parametrização para S, $\mathbf{g}\colon]0,1[\times]0,\pi[\to \mathbb{R}^3$, dada por $\mathbf{g}(\rho, \theta) = (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta, \rho^2)$. Como a terceira coordenada da normal

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{d\rho} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{d\theta} = (-2\rho^2\cos\theta, -2\rho^2\operatorname{sen}\theta, \rho)$$

é positiva, $\mathbf{g}$ não é compatível com a orientação dada pela normal $\mathbf{n}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}&\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = -\iint_{]0,1[\times]0,\pi[} \mathbf{g}^*\Omega_{\mathbf{F}} \\ &= -\iint_{]0,1[\times]0,\pi[} \left(\rho^2(-2\rho^2\cos\theta) + \rho\operatorname{sen}\theta(-2\rho^2\operatorname{sen}\theta) + (\rho\cos\theta - \rho^2)\rho\right)\, d\rho \wedge d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

(3 val.) **2.** Calcule a área da variedade S do problema anterior.

Resolução: Seja $\mathbf{g}$ a parametrização utilizada na pergunta anterior. Temos,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_2(S) &= \iint_S dV_2 = \iint_{]0,1[\times]0,\pi[} \left\| \frac{\partial \mathbf{g}}{d\rho} \times \frac{\partial \mathbf{g}}{d\theta} \right\| d\rho\, d\theta \\ &= \iint_{]0,1[\times]0,\pi[} \rho\sqrt{1+4\rho^2}\, d\rho\, d\theta \\ &= \frac{\pi}{12}\left[(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\pi}{12}(5\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$

(2 val.) **3.** Considere a forma-1, $\eta = (x^2+y^2)^2 x dx + (x^2+y^2)^2 y dy + dz$, e a curva

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \tfrac{x^2}{4} + \tfrac{y^2}{9} + z^2 = 1,\ z = x+y,\ x,y,z \geq 0\right\}.$$

Calcule $\int_C \eta$ num sentido à sua escolha.

Resolução: Note-se que a forma η é exacta: $\eta = df$, onde $f(x,y,z) = \frac{(x^2+y^2)^3}{6} + z$. A curva C une os pontos $\mathbf{A} = (\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}})$ e $\mathbf{B} = (0, \frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$. Portanto, orientado-a de acordo com o sentido de $\mathbf{A}$ para $\mathbf{B}$ e aplicando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\int_C \eta = f(\mathbf{B}) - f(\mathbf{A}) = \frac{1}{6}\left(\frac{9}{10}\right)^3 - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^3 + \frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2 val.) **4.** Determine se a função $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\frac{|y|}{1+x^2+y^2}$ é integrável em $\mathbb{R}^2$. Se for, calcule o seu integral.

Resolução: A função f é mensurável porque é contínua *q.t.p* (f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$). Uma vez que $f \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^2} f\, dV_2$ está definido é dado por

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} f\, dV_2 &= \lim_{k\to\infty} \iint_{B_k(\mathbf{0})} f\, dV_2 = \lim_{k\to\infty} \iint_{]0,k]\times]0,2\pi[} \frac{|r \operatorname{sen}\theta|}{r^2(1+r^2)} r dr d\theta \\ &= \lim_{k\to\infty} 2\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^k \frac{1}{1+r^2}\, dr = 2\pi.\end{aligned}$$

Em particular, f é integrável.

(4 val.) **5.** Seja $\omega \in \Omega^{n-1}(\mathbb{R}^n)$. Mostre que ω é exacta *sse*, para toda a variedade-(n-1), S, compacta, sem bordo ($\partial S = \varnothing$) e orientável, se tem

$$\int_S \omega = 0.$$

Resolução: Suponhamos que ω é exacta: $\omega = d\alpha$. Aplicando o Teorema de Stokes a uma variedade S nas condições do eunciado, vem

$$\int_S \omega = \int_{\partial S} \alpha = 0,$$

pois $\partial S = \varnothing$.

Suponhamos agora que ω satisfaz as condições do enunciado. Temos $d\omega = f dV_n$, onde $dV_n = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ e $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞. Se $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ é tal que $f(\mathbf{p}) > 0$, então, por continuidade, existe $r > 0$ tal que $f > \frac{f(\mathbf{p})}{2}$ em $B_r(\mathbf{p})$. Aplicando o Teorema da Stokes a $S = \partial B_r(\mathbf{p})$ (com a orientação induzida pela orientação dV_n em $B_r(\mathbf{p})$), obter-se-ia

$$\int_S \omega = \int_{B_r(\mathbf{p})} d\omega = \int_{B_r(\mathbf{p})} f\, dV_n \geq \frac{f(\mathbf{p})}{2} \operatorname{Vol}_n(B_r(\mathbf{p})) > 0,$$

contrariando a hipótese $\int_S \omega = 0$. Da mesma forma se concluí que não existe $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\mathbf{p}) < 0$. Portando, ω é fechada. Do Lema de Poincaré segue que ω é exacta, pois $\mathbb{R}^n$ é um conjunto em estrela.