Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 2 – 20 DE DEZEMBRO DE 2003 – VERSÃO 2

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(1) Considere a variedade-2, $M \subset \mathbb{R}^3$ definida por
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 1 + x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 < 4\},$$
e orientada com o campo de normais unitárias n, tal que $n_y < 0$.

(4 val.) (a) Seja $\xi = 2z dx \wedge dy + y dx \wedge dz + 2x dy \wedge dz$.
Calcule $\int_M \xi$ segundo a orientação dada.

(4 val.) (b) Seja $\omega = -ze^y dx \wedge dy - 2e^y dx \wedge dz - xe^y dy \wedge dz$.
Utilizando o teorema de Stokes com M *e* ∂M, calcule $\int_M \omega$ segundo a orientação dada.

(2) Considere a forma-1, $\eta = \left(\frac{-2y}{(x-3)^2+y^2} + yz^2\right) dx + \left(\frac{2(x-3)}{(x-3)^2+y^2} + xz^2\right) dy + (2xyz + 9)\, dz$.

(3.5 val.) (a) Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ a elipse definida pelas equações $\frac{(x-3)^2}{3} + \frac{y^2}{25} = 1$, $z = 5$, orientada num sentido à sua escolha.
Calcule $\int_C \eta$.

(3.5 val.) (b) Considere a variedade-1, $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = (\sin^2 t, \sin^3 t, t)$ com $t \in]0, \pi[$.
Calcule $\int_\gamma \eta$ segundo a orientação pedida.

(2.5 val.) (3) Seja $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e considere o campo vectorial $f(x,y,z) = \varphi(x^2 + y^2 + z^2)(x,y,z)$. Sabendo que $\operatorname{div} f = 0$, *e sem calcular directamente* $\operatorname{div} f$, determine φ.

(2.5 val.) (4) Determine se a função $f(x,y) = (1 + x^2 + y^2)^{-1}(x^2 + y^2)^{-3/4}$ é integrável em $\mathbb{R}^2$. Em caso afirmativo calcule um majorante para $\int_{\mathbb{R}^2} f$.