Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 2 – 20 DE DEZEMBRO DE 2003 – VERSÃO 1 – RESOLUÇÃO

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(1) Considere a variedade-2, $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + y^2 + z^2,\ y^2 + z^2 < 4\},$$

e orientada com o campo de normais unitárias n, tal que $n_x < 0$.

(4 val.) (a) Seja $\omega = 2zdx \wedge dy - 2ydx \wedge dz - xdy \wedge dz$.
Calcule $\int_S \omega$ segundo a orientação dada.

(4 val.) (b) Seja $\xi = -2ze^x dx \wedge dy + 2ye^x dx \wedge dz + 4e^x dy \wedge dz$.
Utilizando o teorema de Stokes com S e ∂S, calcule $\int_S \xi$ segundo a orientação dada.

<u>Res:</u>

a) Parametrizamos S com $g(\rho, \theta) = (1 + \rho^2, \rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$, $\rho \in]0, 2[$, $\theta \in]0, 2\pi[$. Temos, no ponto $(\rho, \theta) = (1, \pi/2)$ que

$$Dg(1, \pi/2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e $(2, 0, 1) \times (0, -1, 0) = (1, 0, 2)$, pelo que g não é compatível com n.

Temos $g^*\omega = -(4\rho^3 + \rho(1 + \rho^2))d\rho \wedge d\theta$. Assim,

$$\int_S \omega = -\int_0^{2\pi} \int_0^2 -(4\rho^3 + \rho(1 + \rho^2))d\rho d\theta = 44\pi.$$

b) Temos $d\xi = 0$ e ξ está definida em todo o $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, pelo que ξ é exacta. Calculemos um potencial $\eta = \eta_1 dx + \eta_2 dy + \eta_3 dz$ para ξ. De $\xi = d\eta$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial y} &= -2ze^x \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial x} - \frac{\partial \eta_1}{\partial z} &= 2ye^x \\ \frac{\partial \eta_3}{\partial y} - \frac{\partial \eta_2}{\partial z} &= 4e^x \end{cases}$$

Pondo, $\eta_1 = 0$ obtemos facilmente um potencial $\eta = -2ze^x dy + 2ye^x dz$.

Parametrizamos o bordo de S com $g(\theta) = (5, 2\cos\theta, -2\sin\theta)$, $\theta \in]0, 2\pi[$. Temos $g^*\eta = [4\sin\theta e^5(-2\sin\theta) + 4\cos\theta e^5(-2\cos\theta)]d\theta = -8e^5 d\theta$, pelo que

$$\int_S \xi = \int_S d\eta = \int_{\partial S} \eta = \int_0^{2\pi} (-8e^5)d\theta = -16\pi e^5.$$

Note que a parametrização de ∂S é a consistente com a normal n.

(2) Considere a forma-1, $\eta = \left(\frac{-3y}{(x-2)^2+y^2} + y^2 z\right) dx + \left(\frac{3(x-2)}{(x-2)^2+y^2} + 2xyz\right) dy + (xy^2+7)\, dz$.

(a) Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ a elipse definida pelas equações $\frac{(x-2)^2}{5} + \frac{y^2}{49} = 1$, $z = 8$, orientada num sentido à sua escolha. (3
Calcule $\int_C \eta$.

(b) Considere a variedade-1, $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = (\sin^3 t, \sin^2 t, t)$ com $t \in]0,\pi[$. (3
Calcule $\int_\gamma \eta$ segundo a orientação pedida.

Res:

a) Temos $\eta = \xi + \mu$ onde $\mu = y^2 z dx + 2xyz dy + (xy^2+7)dz$ e $\xi = \frac{-3y}{(x-2)^2+y^2}dx + \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+y^2}dy$.

Como sabemos ξ é fechada mas não exacta no seu domínio, sendo singular ao longo do eixo vertical que passa em $(2,0,0)$. Por outro lado, é fácil de verificar que μ é exacta com $\mu = d\phi = d(xy^2 z + 7z)$.

A elipse C dá a volta ao eixo onde ξ é singular e, como sabemos, se orientarmos C no sentido anti-horário do ponto de vista de um observador em $(2,0,10)$ temos $\oint_C \xi = 6\pi$. Por outro lado, $\oint_C \mu = 0$ pois μ é exacta. Então $\oint_C \xi = 6\pi + 0 = 6\pi$.

b) Temos $\alpha(0) = (0,0,0)$ e $\alpha(\pi) = (0,0,\pi)$. Logo, $\int \mu d\alpha = \phi(0,0,\pi) - \phi(0,0,0) = 7\pi$.

Por outro lado, sendo ξ fechada, o seu trabalho ao longo do caminho $\alpha(t)$ vai ser o mesmo que o trabalho ao longo do segmento vertical que une $(0,0,0)$ a $(0,0,\pi)$. Como a componente vertical de ξ é nula, esse trabalho é zero. Então $\int \eta d\alpha = 0 + 7\pi = 7\pi$.

(3) Seja $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ e considere o campo vectorial $f(x,y,z) = \phi(x^2+y^2+z^2)(x,y,z)$. Sabendo que $\operatorname{div} f = 0$, *e sem calcular directamente* $\operatorname{div} f$, determine ϕ. (2

Res:

Seja S_r a superfície esférica de raio r centrada na origem. Uma vez que f é normal a S_r, é imediato calcular o fluxo através de S_r no sentido da normal exterior unitária $n = \frac{1}{r}(x,y,z)$. Sendo $f \cdot n = \phi(r^2) r$, obtemos

$$\int_{S_r} f \cdot n = 4\pi r^3 \phi(r^2).$$

Seja agora $r < r'$ e

$$V_{rr'} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : r^2 < x^2+y^2+z^2 < r'^2\}.$$

Temos $\partial V_{rr'} = B_r \cup B_{r'}$, onde $B_{r'}$ fica orientada com a normal exterior e B_r com a normal interior à bola de raio r. Então pelo teorema da divergência,

$$\int_{V_{rr'}} \operatorname{div} f = 0 = -\int_{B_r} f \cdot n + \int_{B_{r'}} f \cdot n = 4\pi[r'^3 \phi(r'^2) - r^3\phi(r^2)].$$

Logo, e uma vez que este resultado é válido para todos os $r' > r > 0$, temos de ter $\phi(r^2) r^3 = a$ onde $a \in \mathbb{R}$ é uma constante. Logo, $\phi(r^2) = a/r^3$.

É imediato verificar que com $\phi(r^2) = a/r^3$, f tem de facto divergência nula no seu domínio $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

Note que não podemos aplicar o teorema da divergência a volumes que contenham a origem, pois f não está definido em $(0,0,0)$. O campo f é o campo eléctrico criado por uma carga eléctrica em repouso na origem, sendo a carga dada por a (a menos de constantes).

(2.5 val.) (4) Determine se a função $g(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/4}(1+x^2+y^2)}$ é integrável em $\mathbb{R}^2$. Em caso afirmativo calcule um majorante para $\int_{\mathbb{R}^2} g$.

Res:

Seja

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Observamos que em D, g é dominada por $h(x,y) = 1/(x^2+y^2)^{3/4}$. Vejamos se $h \in L(D)$. Em coordenadas polares teremos,

$$\int_D h = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{r^{3/2}} r d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r}} dr.$$

Como foi visto nas aulas, $1/\sqrt{r} \in L(]0,1])$, pelo que $h \in L(D)$ e consequentemente, sendo g mensurável, temos também $g \in L(D)$, com

$$\int_D g \leq \int_D h = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{r}} dr = 4\pi.$$

Falta agora verificar o que acontece para $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$. Nessa região, g é dominada por $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(1+x^2+y^2)}$. Seja,

$$A_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq k^2\}.$$

Seja $f_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ k = 2,3,4,...$ definida por

$$f_k(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A_k \\ 0, & (x,y) \notin A_k. \end{cases}$$

Temos que a sucessão de funções$\{f_k\}$ é monótona crescente porque f é positiva. Por outro lado, $f_k \in L(A)$ pois f_k é contínua e limitada no interior do compacto A_k e é zero fora de A_k. Temos ainda,

$$\int_A f_k = \int_{A_k} f = \int_0^{2\pi} \int_1^k \frac{1}{r(1+r^2)} r d\theta dr = 2\pi[\arctan k - \pi/4] \leq \pi^2/2.$$

Logo, o TCML diz-nos que $f \in L(A)$ e que $\int_A f = \pi^2/2$. Uma vez que g é mensurável, temos então também $g \in L(A)$ e

$$\int_A g \leq \int_A f = \pi^2/2.$$

Como $\mathbb{R}^2 = D \cup A$ (e $D \cap A$ é a circunferência de raio 1 que tem medida nula), temos também $g \in L(\mathbb{R}^2)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} g = \int_D g + \int_A g \leq 4\pi + \pi^2/2.$$