Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE DE RECUPERAÇÃO 1 – 9 DE JANEIRO DE 2004

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(1) Considere a variedade $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sin\sqrt{x^2+y^2},\ 0 < \sqrt{x^2+y^2} < 2\pi\}.$$

(3 val.) (a) Determine a equação do espaço tangente a S no ponto $(\pi, 0, 0)$.

(3 val.) (b) Em que pontos é que podemos garantir que é possível descrever localmente S como o gráfico de uma função de classe C^1, da forma $x = g(y,z)$?

(3 val.) (c) Seja $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}}$. Calcule $\int_S f$.

(2) Considere a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2},\ z + \sqrt{x^2+y^2} \le 2,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados do tipo $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

(3 val.) (b) Sabendo que V tem densidade de massa dada por $\alpha(x,y,z) = 5z$, calcule a massa de V.

(2.5 val.) (3) Mostre que a união numerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.

(2.5 val.) (4) Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-k, seja $p \in M$ e $v \in T_pM$. Mostre que existe uma curva C sobre M, parametrizada por $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to M$, com $\epsilon > 0$, tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Sugestão: Escreva os pontos de $\mathbb{R}^n$ na forma (x,y) com $x \in \mathbb{R}^k$ e $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Suponha que localmente em $p = (x_0, y_0)$, M é o gráfico de uma função de classe C^1 da forma $y = f(x)$. Escreva $v = (v_x, v_y)$ e considere a curva em $\mathbb{R}^k$ dada por $\beta(t) = x_0 + tv_x$.