Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

FÍSICA E MATEMÁTICA

$1^{\underline{\text{O}}}$ TESTE – 11 DE NOVEMBRO DE 2000 – DAS 9H ÀS 10H30

apresente e justifique todos os cálculos
cotação: 2.5 valores por alínea

(1) Considere a equação
$$x^3 + y^4 - x^2 y - \cos x = 0 \ .$$
(a) Mostre que, numa vizinhança do ponto $(0,1)$, esta equação define implicitamente y como função de x, ou seja, $y = f(x)$.
(b) Calcule $f'(0)$, onde f é a função definida em (a).

(2) Considere o elipsóide
$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6\} \ .$$
(a) Mostre que X é uma variedade de dimensão 2 e calcule o seu espaço tangente no ponto $(1,1,1)$.
(b) Calcule o máximo da função $f(x,y,z) = x + y$ sobre X.

(3) Esboce o conjunto
$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x + y \le \pi \, , \ 2x \le y \le 2x + 2\}$$
e calcule $\int_X f\, dV$ para a função $f(x,y) = e^{2x-y} \sin(x+y)$ recorrendo a uma mudança de coordenadas apropriada.

(4) Exprima o integral iterado
$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$
como um integral iterado em coordenadas cilíndricas.

(5) Demonstre o teorema do valor intermédio para integrais: Seja X um conjunto compacto e conexo em $\mathbb{R}^n$. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : X \to \mathbb{R}$ uma função não-negativa integrável sobre X. Prove que existe um ponto $x_0 \in X$ tal que
$$\int_X fg\, dV = f(x_0) \int_X g\, dV \ .$$
Sugestão: Se M e m são os valores máximo e mínimo de f, então $mg \le fg \le Mg$.

(6) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos(tx)\, dx$. Mostre que $f'(t) = -\frac{1}{2} t f(t)$ e determine $f(t)$ a partir desta equação (pode usar $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Respostas sumárias:

(1) (a) Seja $F(x,y) = x^3 + y^4 - x^2y - \cos x$. A função F é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$ com $F(0,1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 4 \neq 0$. Logo, pelo teorema da função implícita, a equação $F(x,y) = 0$ define $y = f(x)$ como função de x numa vizinhança de $x = 0$ com $f(0) = 1$.

(b) Como em toda uma vizinhança de $x = 0$ se tem $F(x, f(x)) = 0$, aplicando a regra da cadeia obtém-se

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))f'(x) = 0 \ , \quad \forall x \in \text{ essa vizinhança} \ .$$

Portanto, uma vez que $f(0) = 1$, vem $f'(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = 0$.

(2) (a) O conjunto X é o nível 0 da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$. A jacobiana $g'(x,y,z) = [2x \quad 4y \quad 6z]$ só não tem característica máxima (i.e., só é zero) na origem. Como a origem não está em X, conclui-se que $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$ é uma variedade de dimensão $3 - 1 = 2$. O espaço tangente a X no ponto $(1,1,1)$ é o núcleo de $Dg(1,1,1)$, ou seja, é o conjunto de vectores ortogonais a grad $g(1,1,1) = (2,4,6)$:

$$T_{(1,1,1)}X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 4y + 6z = 0\} \ .$$

(b) Seja $F_\lambda(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) = x + y + \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6)$. Resolve-se o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_\lambda}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F_\lambda}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial F_\lambda}{\partial z} = 0 \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \end{array} \right. \iff \ldots \iff \left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ \lambda = \ldots \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{l} x = -2 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ \lambda = \ldots \end{array} \right.$$

Comparando os valores $f(2,1,0)$ e $f(-2,-1,0)$, conclui-se que o máximo de f sobre X é $f(2,1,0) = 3$.

(3) Considera-se a mudança linear de coordenadas $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = (x + y, y - 2x)$, que tem $\det g'(x,y) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$. Então $g(X) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u < \pi \ , \ 0 < v < 2\}$ e a função f é $h \circ g$ para $h(u,v) = e^{-v}\sin u$. Pelo teorema de mudança de coordenadas para o integral,

$$\int_X (h \circ g)|\det g'| \, dV = \int_{g(X)} h \, dV \ .$$

Então, pelo teorema de Fubini,

$$3\int_X f \, dV = \int_0^\pi \int_0^2 e^{-v} \sin u \, dv \, du \ .$$

Conclui-se que

$$\int_X f \, dV = \frac{1}{3}\int_0^\pi \sin u \, du \int_0^2 e^{-v} \, dv = \frac{2}{3}(1 - e^{-2}) \ .$$

(4) O sólido é a porção, no primeiro quadrante, que fica no interior do cilindro $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = 1\}$ e abaixo do cone $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 = z^2\}$. Em coordenadas cilíndricas, o integral fica

$$\int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^r f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r \, dz \, d\theta \, dr \ .$$

(5) De acordo com a sugestão, por comparação obtém-se

$$m\int_X g \, dV \leq \int_X fg \, dV \leq M\int_X g \, dV \ .$$

Se $\int_X g \, dV = 0$, então $\int_X fg \, dV = 0$ e x_0 pode ser qualquer ponto de X. Se $\int_X g \, dV \neq 0$, então, pelo teorema do valor intermédio aplicado à função f, existe $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = \frac{\int_X fg \, dV}{\int_X g \, dV}$.

(6) A função $g(x,t) = e^{-x^2}\cos(tx)$ é contínua com $\frac{\partial g}{\partial t}$ contínua e $|g(x,t)| \leq e^{-x^2}$, $|\frac{\partial g}{\partial t}| \leq |x|e^{-x^2}$, $\forall (x,t)$, onde e^{-x^2} e $|x|e^{-x^2}$ são funções integráveis. Pelo teorema que dá a derivada do integral como o integral da derivada relativamente a um parâmetro, $f(t)$ é continuamente diferenciável com

$$\begin{aligned} f'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-x^2}\cos(tx)\right) dx = \int_0^{+\infty} -xe^{-x^2}\sin(tx) \, dx \\ &= -\int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-x^2} t\cos(tx) \, dx = -\frac{t}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(tx) \, dx = -\frac{t}{2}f(t) \ , \end{aligned}$$

onde na igualdade do meio se primitivou por partes em ordem a x. Para $f(t) \neq 0$, tem-se $\frac{f'(t)}{f(t)} = -\frac{t}{2}$. Primitivando ambos os membros em ordem a t, obtém-se $\ln|f(t)| = -\frac{t^2}{4} +$ constante, ou seja, $f(t) = ke^{-\frac{t^2}{4}}$ onde $k = f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Conclui-se que $f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{t^2}{4}}$.