

Nome: _____ Nº: _____ Curso: _____

SALA
DOCENTE

ANÁLISE MATEMÁTICA III A LCI, LEAer, LEBM, LEFT e LMAC

1º Teste – 6 de Novembro de 2004

NOTAS
1(a) _____
1(b) _____
1(c) _____
1(d) _____
2(a) _____
2(b) _____
2(c) _____
2(d) _____
3 _____
4 _____
TOTAL

Instruções

- Resolva todas as questões nestas páginas, utilizando o verso se necessário.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Não é permitida a utilização de máquinas de calcular nem de quaisquer elementos de consulta.
- O teste tem a duração de **1 hora e 30 minutos**.

Problema 1.

Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 - 4yz + 10z^2 = 3\}$.

(a) (2 val.) Mostre que M é uma variedade de dimensão 2.

(b) (2 val.) Em que pontos de M é que o Teorema da Função Implícita não garante que se pode escrever M localmente como o gráfico duma função $z = f(x, y)$?

(c) (2 val.) Indique uma base para o espaço tangente a M no ponto $(1, 1, 0)$.

(d) (2 val.) Calcule o máximo da restrição da função $f(x, y, z) = y - 3z$ à variedade M .

Problema 2.

Considere o conjunto mensurável

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1, z > \sqrt{x^2 + y^2}, 0 < x < y\}.$$

(a) (2 val.) Escreva o integral $\iiint_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int \left(\int \left(\int f \, dy \right) dx \right) dz$.

(b) (1.5 val.) Escreva o integral $\iiint_S f$ em coordenadas cilíndricas.

(c) (1.5 val.) Escreva o integral $\iiint_S f$ em coordenadas esféricas.

(d) (2 val.) Calcule o volume de S .

Problema 3. (2 val.)

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\pi}{2} < 2x + y < 0, 0 < 2y - x < 1\}$. Calcule $\iint_A (2y - x)^2 \cos(2x + y) dx dy$, usando uma mudança de coordenadas apropriada.

Problema 4. (3 val.)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ uma função integrável em \mathbb{R} . Mostre que, se $\int_{\mathbb{R}} f = 0$, então $f = 0$ q.t.p.