

Nome: \_\_\_\_\_ Nº: \_\_\_\_\_ Curso: \_\_\_\_\_

SALA
DOCENTE

## ANÁLISE MATEMÁTICA III A LCI, LEAer, LEBM, LEFT e LMAC

1º Teste – 6 de Novembro de 2004

NOTAS
1(a) _____
1(b) _____
1(c) _____
1(d) _____
2(a) _____
2(b) _____
2(c) _____
2(d) _____
3 _____
4 _____
TOTAL

### Instruções

- Resolva todas as questões nestas páginas, utilizando o verso se necessário.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Não é permitida a utilização de máquinas de calcular nem de quaisquer elementos de consulta.
- O teste tem a duração de **1 hora e 30 minutos**.

### Problema 1.

Considere o conjunto  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 - 6xz + 6z^2 = 7\}$ .

(a) (2 val.) Mostre que  $M$  é uma variedade de dimensão 2.

(b) (2 val.) Em que pontos de  $M$  é que o Teorema da Função Implícita não garante que se pode escrever  $M$  localmente como o gráfico duma função  $z = f(x, y)$ ?

(c) (2 val.) Indique uma base para o espaço tangente a  $M$  no ponto  $(0, 1, 1)$ .

(d) (2 val.) Calcule o máximo da restrição da função  $f(x, y, z) = x - 3z$  à variedade  $M$ .

**Problema 2.**

Considere o conjunto mensurável

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 8, z > \sqrt{x^2 + y^2}, 0 < y < x\}.$$

(a) (2 val.) Escreva o integral  $\iiint_S f$  em termos de integrais iterados da forma  $\int \left( \int \left( \int f dx \right) dy \right) dz$ .

(b) (1.5 val.) Escreva o integral  $\iiint_S f$  em coordenadas cilíndricas.

(c) (1.5 val.) Escreva o integral  $\iiint_S f$  em coordenadas esféricas.

(d) (2 val.) Calcule o volume de  $S$ .

**Problema 3.** (2 val.)

Seja  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < 4x + y < \frac{\pi}{2}, 0 < 2x + y < 1\}$ . Calcule  $\iint_A (2x + y)^3 \cos(4x + y) dx dy$ , usando uma mudança de coordenadas apropriada.

**Problema 4.** (3 val.)

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$  uma função integrável em  $\mathbb{R}$ . Mostre que, se  $\int_{\mathbb{R}} f = 0$ , então  $f = 0$  q.t.p.