Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 8 DE NOVEMBRO DE 2003 – VERSÃO 2

apresente e justifique todos os cálculos

duração: 90 minutos

(1) Considere o conjunto $M \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{8} + z^2 = 1\}.$$

(3 val.) (a) Mostre que M é uma variedade. Determine a sua dimensão.

(3 val.) (b) Determine qual o valor mínimo da função $f(x, y, z) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 2z$ em M.

(3 val.) (c) Seja $h(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+7z^2}}$. Calcule $\int_M h$.
(Utilize coordenadas esféricas.)

(2) Considere a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 1)^2 \leq z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

(3 val.) (a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados do tipo $\int (\int (\int dy) dx) dz$.

(3 val.) (b) Calcule o volume de V.

(2.5 val.) (3) Seja S uma variedade-m em $\mathbb{R}^n$, $1 \leq m < n$, seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $S \cap U$ uma vizinhança de coordenadas de S. Seja $f : S \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo. Mostre que $\int_{S \cap U} f$ é independente da parametrização.

(2.5 val.) (4) Seja $1 \leq k < n$. Mostre que toda variedade-k compacta em $\mathbb{R}^n$ tem medida nula.

(Recorde que toda a cobertura aberta de um conjunto compacto tem uma subcobertura finita.)