Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA IIIA

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

TESTE 1 – 8 DE NOVEMBRO DE 2003 – VERSÃO 1

RESOLUÇÃO RESUMIDA

duração: 90 minutos

(1) Considere o conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ definido por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1\}.$$

(3 val.) (a) Mostre que S é uma variedade. Determine a sua dimensão.
Res: $p \in S \Leftrightarrow F(p) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 - 1 = 0$. F é de classe C^1 e $DF(x, y, z) = [x/2\ y/2\ 2z]$ tem característica máxima 1 excepto em $(0, 0, 0) \notin S$. Logo, S é uma variedade-2.

(3 val.) (b) Determine qual o valor mínimo da função $f(x, y, z) = 2x + 2y + 4z$ em S.
Res: Pelo método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 &= 1 \\ (2, 2, 4) &= \lambda(x/2, y/2, 2z) \end{cases}$$

Logo, $\lambda \neq 0$ e $x = y = 2z = 4/\lambda$. Substituindo na primeira equação temos $\lambda = \pm\sqrt{12}$. Facilmente verificamos que o ponto $p_1 = (-2/\sqrt{3}, -2/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ é o mínimo de f e $p_2 = (2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ é o máximo. (Note que S é compacta e f é contínua, pelo que os pontos de máximo e mínimo existem.)

(3 val.) (c) Seja $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1+3z^2}}$. Calcule $\int_S f$.
(Utilize coordenadas esféricas.)
Res: Parametrizemos S com $g(\theta, \phi) = (2\cos\theta\sin\phi, 2\sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$, com $\theta \in]0, 2\pi[$ e $\phi \in]0, \pi.[$ Verificamos facilmente que $g(\theta, \phi) \in S$ pois satisfaz a equação $F(g(\theta, \phi)) = 0$. g é de classe C^1 e injectiva no domínio considerado e g^{-1} é contínua. Também,

$$DG(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} -2\sin\theta\sin\phi & 2\cos\theta\cos\phi \\ 2\cos\theta\sin\phi & 2\sin\theta\cos\phi \\ 0 & -\sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ D_\theta g & D_\phi g \\ | & | \end{bmatrix}$$

tem característica 2. Temos, $V(D_\theta g, D_\phi g) = ||D_\theta g \times D_\phi g|| = \sqrt{\det Dg^t Dg} = 2\sin\phi\sqrt{1 + 3\cos^2\phi}$.
Logo,

$$\int_S f = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \frac{1}{\sqrt{1 + 3\cos^2\phi}} 2\sin\phi\sqrt{1 + 3\cos^2\phi} = 4\pi \int_0^{\pi} \sin\phi d\phi = 8\pi.$$

(2) Considere a região de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le (\sqrt{x^2+y^2}-1)^2,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge 0\}.$$

(a) Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados do tipo $\int(\int(\int dx)dy)dz$.

Res:

$$Vol(V) = \int_0^1 \left(\int_0^{1+\sqrt{z}} \left(\int_{\sqrt{(1+\sqrt{z}^2)-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \right) dy + \int_{1+\sqrt{z}}^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} dx \right) dy \right) dz.$$

(b) Calcule o volume de V.

Res: Em coordenadas cilíndricas:

$$Vol(V) = \int_0^{\pi/2} \int_1^2 \int_0^{(\rho-1)^2} \rho dz d\rho d\theta = (\pi/2) \int_1^2 (\rho^3 - 2\rho^2 + \rho) d\rho = 7\pi/24.$$

(3) Seja M uma variedade-k em $\mathbb{R}^n$, $1 \le k < n$, seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $M \cap U$ uma vizinhança de coordenadas de M. Seja $f : M \to \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo. (2

Mostre que $\int_{M\cap U} f$ é independente da parametrização.

Res: Foi demonstrado na aula teórica.

(4) Seja $1 \le m < n$. Mostre que toda variedade-m compacta em $\mathbb{R}^n$ tem medida nula. (2

(Recorde que toda a cobertura aberta de um conjunto compacto tem uma sub-cobertura finita.)

Res: Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade-m compacta. Seja $\mathcal{O}$ uma cobertura aberta de M tal que para cada $U \in \mathcal{O}$ se tem que $M \cap U$ é o gráfico de uma função de classe C^1, $f_U : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{n-m}$, V aberto. Tal é sempre possível pois M é localmente dada por um gráfico desse tipo e esse gráfico tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Se M é compacta podemos extrair uma sub-cobertura finita $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, mostrando que M é uma união finita de gráficos, de medida nula, pelo que também tem medida nula.