Nome:____ **Nº:**________ **Curso:**_____

SALA
DOCENTE

ANÁLISE MATEMÁTICA III A
LCI, LEAer, LEBM, LEFT e LMAC
2º Exame – 21 de Janeiro de 2005

NOTAS
1 ____
2 ____
3 ____
4 ____
5 ____
6 ____
7 ____
8 ____
TOTAL

Instruções

- Resolva todas as questões nestas páginas, utilizando o verso se necessário.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Não é permitida a utilização de máquinas de calcular nem de quaisquer elementos de consulta.
- O exame tem a duração de **três horas**.

Problema 1.

Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x + 1,\ z^2 = x^2 + 3y^2\}$.

(a) (1 val.) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(b) (1 val.) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(1, -1, 2)$.

Problema 2. (2 val.)

Calcule a distância da curva $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 2\}$ à origem.

Problema 3. (2 val.) Usando uma mudança de variáveis apropriada, calcule o seguinte integral

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{-1}^{4-x^2-y^2} (x+1) \mathrm{d}z \mathrm{d}y \mathrm{d}x \ .$$

Problema 4.

Considere o conjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0,\ y > 0,\ 0 < x+y < 1,\ 0 < z < 1+2x\}$.

(a) (1 val.) Escreva o integral $\iiint_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int\left(\int\left(\int f\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

(b) (1 val.) Escreva o integral $\iiint_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int\left(\int\left(\int f\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z$.

(c) (0,5 val.) Calcule o volume de S.

Problema 5.

Considere as superfícies

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = (\sqrt{x^2+y^2} - \tfrac{3}{2})^2,\ z < \tfrac{1}{4}\}\ ,$$
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2+y^2 < 4,\ z = \tfrac{1}{4}\}$$

e a forma diferencial $\omega = \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

(a) (1 val.) Usando a definição, calcule $\displaystyle\int_{S^\nu} \omega$, onde ν é uma orientação de S à sua escolha.

(b) (1,5 val.) Usando o Teorema de Stokes, calcule $\displaystyle\int_{M^\mu} \omega$, onde μ é a orientação de M induzida pela normal unitária a M com terceira componente negativa.

Problema 6.

Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^2,\ x \leq 1\}$ e seja F o campo vectorial definido por

$$F(x, y, z) = (x^5 + 2z, \log(4 + y^2), y + e^z) \ .$$

(a) (2 val.) Calcule a área de M.

(b) (2 val.) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais, calcule o trabalho de F ao longo do bordo de M, quando este é percorrido no sentido anti-horário do ponto de vista de um observador colocado no ponto $(100, 0, 0)$.

Problema 7.

Considere as formas diferenciais dadas por

$$\omega = \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}\mathrm{d}x - \frac{x}{x^2+(y-1)^2}\mathrm{d}y \qquad \text{e} \qquad \eta = -\frac{y}{(x+2)^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+2}{(x+2)^2+y^2}\mathrm{d}y \ .$$

Decida, justificando, se $\omega + \eta$ é uma forma exacta nos seguintes conjuntos:

(a) (0,5 val.) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 4\}$

(b) (1 val.) $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1), (-2,0)\}$

(c) (1 val.) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\}$

Problema 8.

Considere a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{x} \operatorname{sen}(xt) \mathrm{d}x$.

(a) (0,5 val.) Mostre que g está bem definida.

(b) (1 val.) Mostre que a equação $u + g(u + v) = 1$ define u como função de v, numa vizinhança do ponto $(u, v) = (1, -1)$.

(c) (1 val.) Calcule a derivada $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}(-1)$.