Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC

2º Exame

29 de Janeiro de 2003

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o conjunto

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 5x^2 + 6xy + 5y^2 = 4\right\}.$$

(2 val.) (a) Mostre que C é uma variedade de dimensão 1 e escreva a equação da recta tangente a C no ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;

(2 val.) (b) Sabendo que a distância d de um ponto (x,y) à recta

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 2\}$$

é dada por $d(x,y) = |\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y-2)|$, determine a distância de C a L.

(2 val.) **2.** Um sólido com a forma da região

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 2\ ,\ y > 0,\, z > 0\right\}$$

tem densidade de massa dada por cz onde $c > 0$ é uma constante. Calcule a constante c sabendo que a massa total desse sólido é 15π.

3. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - x^2 - y^2,\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

com a orientação correspondente à normal unitária $\mathbf{n}$ tal que $n^3 \geq 0$, e a forma-2

$$\omega = 2x dy \wedge dz - 2y dz \wedge dx - x dx \wedge dy.$$

Calcule $\int_S \omega$

(3 val.) (a) pela definição;

(3 val.) (b) usando o Teorema de Stokes.

(2 val.) **4.** Seja S a superfície do problema anterior. Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais, calcule o trabalho da força $\mathbf{F} = (ye^{xy}, xe^{xy}, \frac{x^2+y^2}{2})$ ao longo de ∂S, num sentido à sua escolha.

(2 val.) **5.** Um fio C cuja forma é dada por

$$C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, x = y\right\},$$

tem densidade de massa $\sigma(x,y,z) = 1$. Calcule o momento de inércia de C em relação ao eixo $\mathcal{O}z$.

(2 val.) **6.** Mostre que a função $f\colon \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{x}{y} e^{-xy - \frac{x}{y}}$$

é integrável em $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ e calcule o respectivo integral.

Sugestão: Utilize uma mudança de coordenadas apropriada.

(2 val.) **7.** Mostre que se $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\})$ é fechada, então existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e uma função de classe C^∞ $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{R}$ tais que

$$\omega = \alpha \left(-\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \right) + df.$$

Sugestão: *Recorde que se $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, então $\omega \in \Omega^1(D)$ é exacta sse $\int_C \omega = 0$ para toda a curva fechada $C \subset D$.*