Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

FÍSICA E MATEMÁTICA

EXAME DE 1 DE FEVEREIRO DE 2001

apresente e justifique todos os cálculos

cotação: 1.25 valores por alínea, duração: 3 horas (9:00-12:00)

(1) Seja $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ a função dada por $f(x,y)=(x+\cos y, y+\sin x)$.

(a) Mostre que f é invertível numa vizinhança de $(0,0)$.

(b) Calcule a derivada no ponto $(1,0)$ da função inversa considerada na alínea (a).

(2) Calcule os seguintes integrais recorrendo a mudanças de coordenadas apropriadas.

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{2-x^2}}\sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx.$

(b) $\displaystyle\int_A (x^2-y^2)e^{(x-y)^2}\,dx\,dy$
onde $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0\ ,\ 0<x-y<1\ ,\ 1<xy<2\}$.

(3) Considere a curva $C\subset\mathbb{R}^2$ definida pela equação $5x^2+8xy+5y^2=9$.

(a) Calcule o espaço tangente a C no ponto $(0,\frac{3}{\sqrt{5}})$.

(b) Determine o(s) ponto(s) de C que se encontra(m) mais próximo(s) da origem.

(4) Seja $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(t)=\int_0^1 \ln(2-t^2x^2)\,dx\ .$$

Mostre que f tem um máximo absoluto em $t=0$.

(5) Seja f uma função mensurável não-negativa. Mostre que, se $\int f\,dV=0$, então $f=0$ quase em toda a parte.

(6) Considere o conjunto $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = y + x^2\ ,\ 0 < x < 1\ ,\ 0 < y < 1\}$.

(a) Mostre que X é uma variedade.

(b) Calcule a massa de X sendo a sua densidade de massa dada por $\rho(x, y, z) = x$.

(7) Seja A o triângulo em $\mathbb{R}^3$ com vértices nos pontos $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, -1)$.

(a) Mostre que $o = \frac{1}{3}(2e_{12} + e_{13} - 2e_{23})$ é uma orientação do plano contendo A.

(b) Calcule $\int_{A^o} x\, dy \wedge dz$ onde o é a orientação da alínea (a).

(8) Seja A a porção do hiperbolóide $x^2 = y^2 + z^2 + 1$ na faixa $1 \leq x < \sqrt{2}$.

(a) Escreva uma parametrização de ∂A em termos de uma coordenada angular e descreva a orientação o de A induzida pela parametrização de ∂A escolhida.

(b) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} z\, dy \wedge dz$ onde o é a orientação que escolheu na alínea (a).

(9) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um domínio regular. Exprima o volume de A como um integral de uma forma-$(n - 1)$ sobre a fronteira de A.

(10) Seja A um domínio em forma de estrela em $\mathbb{R}^n$ e seja $B = g(A)$ onde g é uma mudança de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ de classe C^2. Mostre que qualquer forma fechada em B é exacta.

Revisão de provas: 6ª feira, 2 de Fevereiro, 17h-18h, sala P4.35

Respostas sumárias:

(1) (a) Uma vez que f é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e que a sua jacobiana, $f'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & -\sin y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$, no ponto $(0,0)$ tem determinante $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$ não nulo, pelo teorema da função inversa conclui-se que f é localmente invertível perto de $(0,0)$.

(b) Pela regra da cadeia, a derivada da função inversa f^{-1} garantida na alínea (a) no ponto $f(0,0) = (1,0)$ é a inversa da derivada de f em $(0,0)$:

$$(f^{-1})'(1,0) = \left(f'(0,0)\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} .$$

(2) (a) O região de integração é o oitavo do disco $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2\}$ no primeiro quadrante e que fica acima da recta de equação $x = y$. Em coordenadas polares, o integral fica

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \, dr \, d\theta = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6} .$$

(b) Aplicando a mudança de coordenadas $g(x,y) = (x-y, xy)$ que tem $\det g'(x,y) = x + y$, o integral fica

$$\int_1^2 \int_0^1 ue^{u^2} \, du \, dv = \int_1^2 dv \cdot \int_0^1 ue^{u^2} \, du = \frac{e-1}{2} .$$

(3) (a) A curva C é o nível zero da função $g(x,y) = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 9$. O gradiente grad $g(x,y) = (10x + 8y, 8x + 10y)$ gera o espaço normal a C em $(x,y) \in C$. No ponto $(0, \frac{3}{\sqrt{5}})$ o espaço normal é o subespaço dos múltiplos de $(\frac{24}{\sqrt{5}}, \frac{30}{\sqrt{5}})$, pelo que o espaço tangente a C nesse ponto é gerado por $(\frac{30}{\sqrt{5}}, -\frac{24}{\sqrt{5}})$.

(b) Seja $f(x,y) = x^2 + y^2$ a função que dá o quadrado da distância à origem. Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, qualquer mínimo de f restrita a C é ponto crítico de $F_\lambda(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, onde g é a função definida na alínea (a). Os pontos críticos de F_λ sobre C satisfazem

$$\begin{cases} 2x + \lambda(10x + 8y) = 0 \\ 2y + \lambda(8x + 10y) = 0 \\ 5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} \ldots \\ x^2 = y^2 \\ 10y^2 + 8xy = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} \ldots \\ x = y \\ y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \ldots \\ x = -y \\ y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

As soluções deste sistema correspondem a valores $f(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1$ ou $f(\pm\frac{3}{\sqrt{2}}, \mp\frac{3}{\sqrt{2}}) = 9$, pelo que os pontos de C mais próximos da origem são $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ e $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

(4) Como a derivada parcial da função integranda em ordem a t é contínua, $|\ln(2 - t^2x^2)| \le \ln 2$ e $|\frac{-2tx^2}{2-t^2x^2}| \le \frac{2}{1}$ para $0 \le x \le 1$ e $-1 < t < 1$, conclui-se pela regra de Leibniz para a derivação sob o integral que a função $f(t)$ é continuamente diferenciável e tem derivada dada por

$$f'(t) = \int_0^1 \frac{-2tx^2}{2 - t^2x^2} \, dx .$$

Daqui sai que $f'(0) = \int_0^1 \frac{0}{2} \, dx = 0$, logo $t = 0$ é um ponto crítico. Aplicando novamente a regra de Leibniz agora à função $f'(t)$, obtém-se

$$f''(t) = \int_0^1 \frac{-4x^2 - 2t^2x^4}{(2 - t^2x^2)^2} \, dx .$$

Como a integranda é não-positiva e mesmo negativa quase em toda a parte, conclui-se que $f''(t) < 0, \forall t \in]-1, 1[$, ou seja, que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo e, por isso, $t = 0$ é um ponto de máximo absoluto.

(5) Já que $f \ge 0$, deve-se mostrar que o conjunto de pontos onde $f > 0$ tem medida nula. Como $\{x : f(x) > 0\} = \cup_{k=1}^{+\infty} X_k$ onde $X_k = \{x : f(x) > \frac{1}{k}\}$, basta mostrar que cada conjunto X_k desta união numerável tem medida nula. Os X_k's são mensuráveis porque f é mensurável. Então cada função g_k definida como valendo $\frac{1}{k}$ em X_k e zero fora de X_k é uma função mensurável satisfazendo $0 \le g_k \le f$, pelo que $0 \le \frac{1}{k} V(X_k) = \int g_k \, dV \le \int f \, dV = 0$. Conclui-se que $V(X_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Continuação das respostas sumárias:

(6) (a) O conjunto X é o gráfico em $\mathbb{R}^3$ da função continuamente diferenciável $g :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = y + x^2$. Logo, X é uma variedade de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$.

(b) Usa-se a parametrização de X dada por $h(x,y) = (x, y, y+x^2)$ cuja jacobiana é $h'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$.

Pelo teorema de Fubini, a massa de X é

$$\int_X \rho \, dV_2 = \int_0^1 \int_0^1 x\sqrt{4x^2+2}\, dx\, dy = \left[\frac{1}{12}(4x^2+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{6}(3\sqrt{3}-1) \ .$$

(7) (a) O plano contendo A é gerado, por exemplo, pelos vectores $v_1 = (1,0,0) - (0,0,-1) = (1,0,1)$ e $v_2 = (0,2,0) - (0,0,-1) = (0,2,1)$. Uma orientação do plano contendo A é pois

$$\frac{v_1 \wedge v_2}{|v_1 \wedge v_2|} = \frac{2e_{12} + e_{13} - 2e_{23}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{1}{3}(2e_{12} + e_{13} - 2e_{23})$$

que coincide com o.

(b) A projecção de A no plano xy é o triângulo de vértices $(1,0)$, $(0,2)$ e $(0,0)$ e A está contido no plano de equação $2x + y - 2z = 2$. A parametrização de A em termos das coordenadas x e y, $g(x,y) = (x, y, x + \frac{y}{2} - 1)$, tem $|\frac{\partial g}{\partial x} \wedge \frac{\partial g}{\partial y}| = |v_1 \wedge \frac{1}{2}v_2| = \frac{3}{2}$ onde v_1 e v_2 são como na alínea (a). Portanto,

$$\int_{A^o} x\, dy \wedge dz = \int_0^1 \int_0^{2-2x} x \cdot \frac{-2}{3} \cdot \frac{3}{2}\, dy\, dx = \int_0^1 x(2x-2)\, dx = -\frac{1}{3} \ .$$

(8) (a) A fronteira de A é a circunferência dada pelas equações $x = \sqrt{2}$ e $y^2 + z^2 = 1$. Uma parametrização de ∂A em termos de uma coordenada angular é, por exemplo, $g(\theta) = (\sqrt{2}, \cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. A orientação em ∂A induzida por g corresponde à orientação de A induzida pela normal unitária ν que aponta para dentro da concavidade do hiperbolóide (em particular, $\nu(1,0,0) = (1,0,0)$).

(b) A forma integranda é $z\, dy \wedge dz = d(yz\, dz)$. Pelo teorema de Stokes

$$\int_{A^o} d(yz\, dz) = \int_{\partial A^o} yz\, dz = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} = 0 \ .$$

(9) O volume de A é $V_n(A) = \int_A 1\, dV_n$ e pode ser escrito em termos de uma forma-n como $\int_{A^{o+}} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ onde o^+ é a orientação standard em $\mathbb{R}^n$. Uma vez que $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n = d(x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n)$, pelo teorema de Stokes tem-se

$$V_n(A) = \int_{A^{o+}} d(x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n) = \int_{\partial A^{o+}} x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n \ .$$

(10) Seja ω uma forma-k fechada em B. Então $g^*\omega$ é uma forma-k fechada em A porque a derivada exterior comuta com o pullback por funções de classe C^2. Como A é um domínio em forma de estrela, o lema de Poincaré garante que $g^*\omega = d\alpha$ para alguma forma-$(k-1)$ α em A. Sendo g uma mudança de coordenadas de classe C^2, tem uma inversa g^{-1} que também é de classe C^2 (a derivada de g^{-1} é continuamente diferenciável porque, pela regra da cadeira, é dada invertendo a derivada de g e a regra de Cramer exprime as entradas da inversa de uma matriz M como funções racionais das entradas de M). Logo, $\omega = (g^{-1})^* d\alpha = d(g^{-1})^*\alpha$, ou seja, $\omega = d\beta$ para a forma-$(k-1)$ $\beta = (g^{-1})^*\alpha$ em B, donde se conclui que ω é exacta.