Nome:____ **Nº:**________ **Curso:**______

SALA
DOCENTE

ANÁLISE MATEMÁTICA III A
LCI, LEAer, LEBM, LEFT e LMAC

Resolução Sumária do 2º Teste/1º Exame – 7 de Janeiro de 2005

NOTAS
1 ____
2(a) ____
2(b) ____
2(c) ____
3(a) ____
3(b) ____
4(a) ____
4(b) ____
5(a) ____
5(b) ____
5(c) ____
5(d) ____
5(e) ____
6(a) ____
6(b) ____
6(c) ____
7 ____
8 ____
TOTAL

Instruções

- Resolva todas as questões nestas páginas, utilizando o verso se necessário.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Não é permitida a utilização de máquinas de calcular nem de quaisquer elementos de consulta.
- O **teste** tem a duração de **1 hora e 30 minutos** e o exame a duração de três horas.

Problema 1 (apenas exame). (1,5 val.)
Considere o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x + \mathrm{e}^y & = 3 \\ x\cos(xy) & = 2 \end{cases}.$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y) = (2, 0)$ onde este sistema tem solução única.

Resolução: Seja $F(x, y) = (x+\mathrm{e}^y, x\cos(xy))$. Esta função é de classe C^1 e o conjunto das soluções do sistema é o conjunto de nível $F^{-1}(3, 2)$, portanto o sistema tem solução única em torno de $(2, 0)$ se F for localmente invertível em torno desse ponto. Note-se que $(2, 0)$ é solução do sistema porque $F(2, 0) = (3, 2)$.

Temos que

$$DF(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{e}^y \\ \cos(xy) - xy\,\mathrm{sen}(xy) & -x^2\,\mathrm{sen}(xy) \end{bmatrix}$$

portanto

$$\det DF(2, 0) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

logo, pelo Teorema da Função Inversa, F é localmente invertível em torno do ponto $(2, 0)$.

Problema 2 (apenas exame).
Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2\}$.

(a) (1 val.) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

Resolução: M é o conjunto de nível $F^{-1}(1, 0)$, onde $F(x, y, z) = (x^2 + 2y^2, z - x^2 - y^2)$ é de classe C^1. A matriz

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2x & 4y & 0 \\ -2x & -2y & 1 \end{bmatrix}$$

tem característica 2 excepto nos pontos onde $2x = 4y = 0$, i.e., nos pontos da forma $(0, 0, z)$. Como $F(0, 0, z) \neq (1, 0)$ para todo o $z \in \mathbb{R}$, conclui-se que $(0, 0, z) \notin M$ e portanto M é uma variedade de dimensão 1.

(b) (1 val.) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(1,0,1)$.

Resolução: O espaço tangente $T_{(1,0,1)}M$ é o complemento ortogonal do espaço gerado pelas linhas da matriz

$$DF(1,0,1) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

logo $\{(0,1,0)\}$ é uma base para $T_{(1,0,1)}M$.

(c) (1,5 val.) Seja f a função definida por $f(x,y,z) = x + y^2 - z$. Justifique que a restrição de f a M tem um máximo e um mínimo absolutos e determine-os.

Resolução: Como M é um conjunto compacto e f é uma função contínua, o Teorema de Weierstrass garante que a restrição de f a M tem um máximo e um mínimo absolutos.
Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, os extremos de f em M são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) + \lambda_1(2x,4y,0) + \lambda_2(-2x,-2y,1) = (0,0,0) \\ F(x,y,z) = (1,0) \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x = 0 \\ 2y + 4\lambda_1 y - 2\lambda_2 y = 0 \\ -1 + \lambda_2 = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}.$$

Da terceira equação temos $\lambda_2 = 1$. Substituindo na segunda equação fica $4y\lambda_1 = 0$ que é equivalente a $y = 0$ ou $\lambda_1 = 0$.
Com $\lambda_1 = 0$, da primeira equação obtemos $x = \frac{1}{2}$. Das duas últimas equações concluimos que $(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{5}{8})$ e $(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{5}{8})$ são soluções.
Com $y = 0$, das duas últimas equações concluimos que $(1,0,1)$, $(-1,0,1)$ também são soluções.
Como $f(1,0,1) = 0$, $f(-1,0,1) = -2$ e $f(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{5}{8}) = f(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{5}{8}) = \frac{1}{4}$, então o máximo é $\frac{1}{4}$ e o mínimo é -2.

Problema 3 (apenas exame).

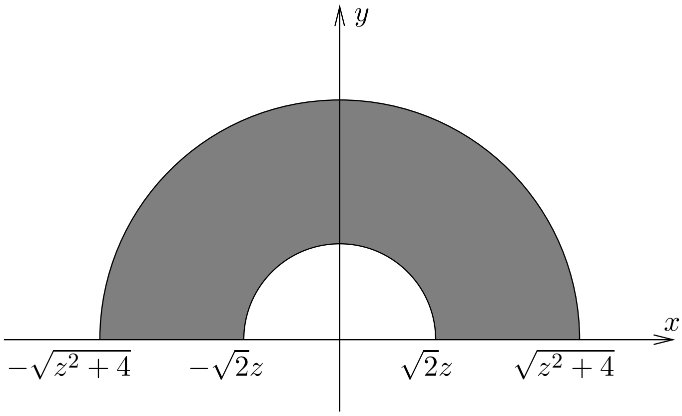
Considere o conjunto mensurável $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z^2 < x^2 + y^2 < z^2 + 4,\ z > 0,\ y > 0\}$.

(a) (1,5 val.) Escreva o integral $\iiint_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int\left(\int\left(\int f \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$.

Resolução: Da condição $2z^2 < x^2 + y^2 < z^2 + 4$, obtém-se $2z^2 < z^2 + 4$, que é equivalente a $-2 < z < 2$. Mas como também é dado que z é positivo, então $z \in]0, 2[$. Os cortes por planos perpendiculares ao eixo dos zz, com $z \in]0, 2[$, são coroas semi-circulares, sendo o raio da semi-circunferência menor igual a $\sqrt{2}z$ e o da semi-circunferência maior igual a $\sqrt{z^2 + 4}$. Portanto tem-se

$$\iiint_S f = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}z} \int_{-\sqrt{z^2+4-y^2}}^{-\sqrt{2z^2-y^2}} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2}z} \int_{\sqrt{2z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2+4-y^2}} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+ \int_0^2 \int_{\sqrt{2}z}^{\sqrt{z^2+4}} \int_{-\sqrt{z^2+4-y^2}}^{\sqrt{z^2+4-y^2}} f \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$



Cortes segundo planos perpendiculares ao eixo dos zz.

(b) (1,5 val.) Calcule o volume de S. (Sugestão: use coordenadas cilíndricas.)

Resolução:

$$\mathrm{vol}(S) = \iiint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \int_0^2 \int_{\sqrt{2}z}^{\sqrt{z^2+4}} r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = \pi \int_0^2 \left[\frac{r^2}{2}\right]_{\sqrt{2}z}^{\sqrt{z^2+4}} \mathrm{d}z$$

$$= \pi \int_0^2 \frac{1}{2}(4 - z^2)\mathrm{d}z = \frac{8\pi}{3}\ .$$

Problema 4 (apenas exame).

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 - 4y^2 < \pi,\ 1 < x + 2y < 3\}$ e seja $h : A \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $h(x, y) = (x^2 - 4y^2, x + 2y)$.

(a) (1 val.) Mostre que h é uma mudança de coordenadas.

Resolução: Pela definição de mudança de coordenadas, é preciso verificar que h é C^1, que $\det Dh(x, y) \neq 0 \quad \forall_{(x,y)\in A}$, e que h é injectiva em A.

i. A função h é de classe C^1 pois é polinomial.

ii. Como

$$\det Dh(x, y) = \det \begin{bmatrix} 2x & -8y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 4(x + 2y)$$

e $x + 2y > 1$ para $(x, y) \in A$, conclui-se que $\det Dh(x, y) \neq 0$ para $(x, y) \in A$.

iii. Para mostrar que h é injectiva no conjunto A, é preciso verificar que h é invertível em A (e não apenas localmente invertível), i.e., pondo $(u, v) = h(x, y)$ então x e y escrevem-se de maneira única como funções de u e v.

$$\begin{cases} u = x^2 - 4y^2 \\ v = x + 2y \end{cases} \iff \begin{cases} u = (v - 2y)^2 - 4y^2 \\ x = v - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} u = v^2 - 4yv \\ x = v - 2y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{v^2 - u}{4v} \\ x = v - \frac{v^2 - u}{2v} \end{cases}$$

(Note-se que $v \neq 0$ se $(x, y) \in A$.)

Como o sistema tem solução única, h é injectiva em A.

(b) (1 val.) Calcule $\displaystyle\iint_A (x + 2y)^2 \operatorname{sen}(x^2 - 4y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Resolução: Pelo Teorema da Mudança de Variáveis, tem-se

$$\iint_A (x + 2y)^2 \operatorname{sen}(x^2 - 4y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{h(A)} \frac{v^2 \operatorname{sen}(u)}{|\det Dh|}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\ .$$

Da alínea anterior, tem-se que $\det Dh = 4(x + 2y) = 4v$. Portanto

$$\iint_A (x + 2y)^2 \operatorname{sen}(x^2 - 4y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^\pi \int_1^3 \frac{1}{4} v \operatorname{sen}(u)\mathrm{d}v\mathrm{d}u = \frac{1}{4}\int_0^\pi \operatorname{sen}(u)\mathrm{d}u \int_1^3 v\mathrm{d}v = 2\ .$$

Problema 5 (TESTE E EXAME).

Seja F o campo vectorial dado por $F(x,y,z) = (x,y,-2z)$ e considere as seguintes variedades:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ -1 < z < 1\}\ ,$$

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = 2 - z^2,\ -1 < z < 1\}\ .$$

(a) (1,5 val.) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de S segundo a normal unitária $\mathbf{n}$ que satisfaz $\mathbf{n}(0,1,0) = (0,-1,0)$.

Resolução: Uma parametrização de S é $g(\theta,z) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, z)$, com $\theta \in]0,2\pi[$ e $z \in]-1,1[$. Como o vector

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial z} = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$$

aponta no sentido contrário de $\mathbf{n}$ (basta verificar num ponto), então o fluxo pedido é

$$\int_S F\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}V_2 = -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -2z)\cdot(\cos\theta,\operatorname{sen}\theta,0)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = -4\pi\ .$$

(b) (1 val.) Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de F através de M segundo a normal unitária $\mathbf{n}$ que satisfaz $\mathbf{n}(0,2,0) = (0,1,0)$.

Resolução: As duas superfícies dadas delimitam um volume V em $\mathbb{R}^3$, i.e., pondo $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2 - z^2,\ -1 < z < 1\}$ tem-se $\partial V = S \cup M$. As normais unitárias a M e a S dadas nesta alínea e na anterior são exteriores ao volume V. Aplicando o Teorema da Divergência tem-se então

$$\iiint_V \operatorname{div}(F)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S F\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}V_2 + \iint_M F\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}V_2\ .$$

Como $\operatorname{div}(F) = 0$ e $\iint_S F\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}V_2 = -4\pi$ (calculado na alínea (a)), obtém-se $\iint_M F\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}V_2 = 4\pi$.

(c) (1 val.) Justifique que F é um campo rotacional e determine um potencial vector para F.

Resolução: Como F está definido em $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto em estrela, e $\operatorname{div}(F) = 0$, então F é um campo rotacional. Se A é um potencial vector para F, i.e., se $\operatorname{rot}(F) = A$, então

$$\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right) = (x,y,-2z)\ .$$

Com $A_1 = 0$ (por exemplo), resolvendo as equações correspondentes à segunda e terceira componentes obtém-se $A_2 = -xy + C(y,z)$ e $A_3 = -2xz + D(y,z)$. Substituindo na primeira componente, verifica-se que podemos tomar $C = D = 0$. Portanto o campo vectorial

$$A(x,y,z) = (0,-2xz,-xy)$$

é um potencial vector para F.
Alternativamente, podemos considerar a forma-2 $\Omega_F = x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - 2z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$, que é exacta pois está definida no conjunto em estrela $\mathbb{R}^3$ e $d\Omega_F = \operatorname{div}(F)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$. Se A é um potencial vector para F, então $\Omega_F = d\omega_A$. Os cálculos para determinar ω_A são semelhantes aos cálculos feitos anterioremnte. Poderiamos obter a forma-1 $\omega_A = -2xz\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z$, à qual corresponde o campo vectorial $A = (0,-2xz,-xy)$.

(d) (1 val.) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais, calcule o fluxo de F através de M segundo a normal unitária $\mathbf{n}$ que satisfaz $\mathbf{n}(0,2,0) = (0,1,0)$.

Resolução: O bordo de M é $\partial M = C_1 \cup C_2$, onde $C_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = 1\}$ e $C_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1,\ z = -1\}$. As curvas C_1 e C_2 são circunferências contidas nos planos $z = 1$ e $z = -1$, respectivamente. Da alínea anterior temos que $F = \operatorname{rot}(A)$ com $A = (0, -2xz, -xy)$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_M F \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}V_2 = \int_{C_1} A \cdot \mathrm{d}g + \int_{C_2} A \cdot \mathrm{d}g \ ,$$

onde as orientações de C_1 e C_2 são dadas pela regra da mão direita aplicada à normal $\mathbf{n}$, i.e., C_1 é percorrida no sentido horário quando vista do ponto $(0,0,100)$ e C_2 no sentido contrário. Uma parametrização para C_1 é $g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 1)$, $\theta \in]0, 2\pi[$. Como g percorre C_1 no sentido contrário ao que queremos, então

$$\int_{C_1} A \cdot \mathrm{d}g = -\int_0^{2\pi} (0, -2\cos\theta, -\cos\theta \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi \ .$$

Uma parametrização para C_2 é $g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, -1)$, $\theta \in]0, 2\pi[$. Como g percorre C_2 no sentido que queremos, então

$$\int_{C_2} A \cdot \mathrm{d}g = \int_0^{2\pi} (0, 2\cos\theta, -\cos\theta \operatorname{sen}\theta) \cdot (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \mathrm{d}\theta = 2\pi \ .$$

Portanto o fluxo pedido é

$$\int_M F \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}V_2 = 4\pi \ .$$

(e) (1 val.) Calcule $\displaystyle\int_M \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}} \mathrm{d}V_2$.

Resolução: Uma parametrização para M é $g(\theta, z) = ((2-z^2)\cos\theta, (2-z^2)\operatorname{sen}\theta, z)$, com $\theta \in]0, 2\pi[$ e $z \in]-1, 1[$, pois em coordenadas cilíndricas a equação que define M se escreve $r = 2 - z^2$. Como a matriz derivada é

$$Dg = \begin{bmatrix} -(2-z^2)\operatorname{sen}\theta & -2z\cos\theta \\ (2-z^2)\cos\theta & -2z\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então

$$Dg^T Dg = \begin{bmatrix} (2-z^2)^2 & 0 \\ 0 & 1+4z^2 \end{bmatrix}$$

e portanto $\sqrt{\det Dg^T Dg} = (2-z^2)\sqrt{1+4z^2}$. Pela definição, tem-se

$$\int_M \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}} \mathrm{d}V_2 = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}} \sqrt{\det Dg^T Dg}\ \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (2-z^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta = \frac{20\pi}{3} \ .$$

Problema 6 (TESTE E EXAME).

Considere as seguintes formas diferenciais

$$\omega = \frac{xz^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{yz^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + z\log(x^2+y^2)\mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{3x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + 4\mathrm{d}z\ .$$

(a) (0,5 val.) Mostre que ω é uma forma exacta em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Resolução: É fácil de ver que a função $\phi(x,y,z) = \dfrac{z^2}{2}\log(x^2+y^2)$ é um potencial para a forma ω, i.e., $d\phi = \omega$, logo ω é exacta.

Nota: O conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ não é em estrela nem é simplesmente conexo, portanto o Lema de Poincaré não permite concluir que ω é uma forma exacta.

(b) (0,5 val.) Mostre que η é uma forma fechada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Resolução:

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{3(x^2+y^2)-6y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \frac{3(x^2+y^2)-6x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y + 0 \\ &= \frac{3x^2-3y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \frac{3y^2-3x^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0 \end{aligned}$$

pois $\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$.

(c) (1 val.) Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2+9y^2 = 36,\ z = 0\}$. Calcule $\displaystyle\int_C (\omega+\eta)$ onde C é percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$.

Resolução: Como C é uma curva fechada e ω é uma forma exacta, então $\displaystyle\int_C \omega = 0$.

Como η é uma forma fechada, então $\displaystyle\int_C \eta = \int_D \eta$ onde $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, z = 0\}$ é percorrida no mesmo sentido de C, uma vez que a elipse C é homotópica à circunferência D no domínio de η, i.e., no conjunto $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$. A função $g(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0)$, com $\theta \in]0,2\pi[$, é uma parametização de D mas com sentido contrário ao do enunciado, portanto

$$\int_D \eta = -\int_0^{2\pi} g^*\eta = -\int_0^{2\pi}(-3)\mathrm{d}\theta = 6\pi\ .$$

Tem-se então

$$\int_C (\omega+\eta) = \int_C \omega + \int_C \eta = 0 + 6\pi = 6\pi\ .$$

Problema 7 (TESTE E EXAME). (1 val.)

Decida se a função $f(x,y) = \dfrac{|x|}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}$ é integrável em $\mathbb{R}^2$ e, em caso afirmativo, calcule o seu integral.

Resolução: f é mensurável porque é contínua q.t.p. (é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).
Seja $D_k = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le k^2\}$. Como $f \ge 0$, o integral $\int_{\mathbb{R}^2} f$ está definido e é dado por

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{k\to+\infty} \iint_{D_k} f = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^k \frac{|r\cos\theta|}{r^2(1+r^2)} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \lim_{k\to+\infty} \int_0^{2\pi} |\cos\theta| \mathrm{d}\theta \int_0^k \frac{1}{1+r^2}\mathrm{d}r$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \left(2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \mathrm{d}\theta\right) \operatorname{arctg}(k) = 2\pi < +\infty \ .$$

Portanto f é integrável em $\mathbb{R}^2$.

Problema 8 (TESTE E EXAME). (1,5 val.)

Seja $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis, não-negativas, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e suponha que a série $\sum_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ é convergente para todo o $x \in I$. Mostre que

$$\int_I \sum_{k=1}^{+\infty} g_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_I g_k \ .$$

Resolução: Seja $f_n = \sum_{k=1}^{n} g_k$. A função f_n é mensurável e não-negativa porque é a soma finita de funções mensuráveis e não-negativas, e o limite

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(x)$$

existe e é finito para todo o $x \in I$, por hipótese. Temos ainda que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sucessão crescente, uma vez que $f_{n+1} = f_n + g_{n+1}$ e $g_{n+1} \ge 0$. Pelo Teorema da Convergência Monótona de Levi (e pela aditividade do integral de Lebesgue para somas finitas de funções mensuráveis não-negativas), temos

$$\int_I \sum_{k=1}^{+\infty} g_k = \int_I \lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \lim_{n\to+\infty} \int_I \sum_{k=1}^{n} g_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_I g_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_I g_k \ .$$