Nome:____ **Nº:**________ **Curso:**_____

SALA
DOCENTE

ANÁLISE MATEMÁTICA III A
LCI, LEAer, LEBM, LEFT e LMAC
2º Teste/1º Exame – 7 de Janeiro de 2005

NOTAS	
1	____
2(a)	____
2(b)	____
2(c)	____
3(a)	____
3(b)	____
4(a)	____
4(b)	____
5(a)	____
5(b)	____
5(c)	____
5(d)	____
5(e)	____
6(a)	____
6(b)	____
6(c)	____
7	____
8	____
TOTAL	

Instruções

- Resolva todas as questões nestas páginas, utilizando o verso se necessário.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Não é permitida a utilização de máquinas de calcular nem de quaisquer elementos de consulta.
- O **teste** tem a duração de **1 hora e 30 minutos** e o exame a duração de três horas.

Problema 1 (apenas exame). (1,5 val.)

Considere o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x + e^y & = 3 \\ x\cos(xy) & = 2 \end{cases}.$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(x, y) = (2, 0)$ onde este sistema tem solução única.

Problema 2 (apenas exame).

Considere o conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 = 1,\ z = x^2 + y^2\}$.

(a) (1 val.) Mostre que M é uma variedade e indique a sua dimensão.

(b) (1 val.) Determine uma base para o espaço tangente a M no ponto $(1, 0, 1)$.

(c) (1,5 val.) Seja f a função definida por $f(x, y, z) = x + y^2 - z$. Justifique que a restrição de f a M tem um máximo e um mínimo absolutos e determine-os.

Problema 3 (apenas exame).

Considere o conjunto mensurável $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z^2 < x^2+y^2 < z^2+4,\ \ z>0,\ \ y>0\}$.

(a) (1,5 val.) Escreva o integral $\iiint_S f$ em termos de integrais iterados da forma $\int\left(\int\left(\int f \, \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$.

(b) (1,5 val.) Calcule o volume de S. (Sugestão: use coordenadas cilíndricas.)

Problema 4 (apenas exame).

Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 - 4y^2 < \pi,\ 1 < x + 2y < 3\}$ e seja $h : A \to \mathbb{R}^2$ a função definida por $h(x, y) = (x^2 - 4y^2, x + 2y)$.

(a) (1 val.) Mostre que h é uma mudança de coordenadas.

(b) (1 val.) Calcule $\displaystyle\iint_A (x + 2y)^2 \operatorname{sen}(x^2 - 4y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Problema 5 (TESTE E EXAME).

Seja F o campo vectorial dado por $F(x,y,z) = (x,y,-2z)$ e considere as seguintes variedades:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ -1 < z < 1\}\ ,$$
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} = 2 - z^2,\ -1 < z < 1\}\ .$$

(a) (1,5 val.) Usando a definição, calcule o fluxo de F através de S segundo a normal unitária $\mathbf{n}$ que satisfaz $\mathbf{n}(0,1,0) = (0,-1,0)$.

(b) (1 val.) Usando o Teorema da Divergência, calcule o fluxo de F através de M segundo a normal unitária $\mathbf{n}$ que satisfaz $\mathbf{n}(0,2,0) = (0,1,0)$.

(c) (1 val.) Justifique que F é um campo rotacional e determine um potencial vector para F.

(d) (1 val.) Usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais, calcule o fluxo de F através de M segundo a normal unitária $\mathbf{n}$ que satisfaz $\mathbf{n}(0,2,0) = (0,1,0)$.

(e) (1 val.) Calcule $\displaystyle\int_M \frac{1}{\sqrt{1+4z^2}} \mathrm{d}V_2$.

Problema 6 (TESTE E EXAME).

Considere as seguintes formas diferenciais

$$\omega = \frac{xz^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{yz^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + z\log(x^2+y^2)\mathrm{d}z \qquad \text{e} \qquad \eta = \frac{3y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x - \frac{3x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y + 4\mathrm{d}z\ .$$

(a) (0,5 val.) Mostre que ω é uma forma exacta em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(b) (0,5 val.) Mostre que η é uma forma fechada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$.

(c) (1 val.) Seja $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 9y^2 = 36,\ z = 0\}$. Calcule $\int_C (\omega + \eta)$ onde C é percorrida no sentido horário quando observada do ponto $(0,0,10)$.

Problema 7 (TESTE E EXAME). (1 val.)

Decida se a função $f(x,y) = \dfrac{|x|}{(x^2+y^2)(1+x^2+y^2)}$ é integrável em $\mathbb{R}^2$ e, em caso afirmativo, calcule o seu integral.

Problema 8 (TESTE E EXAME). (1,5 val.)

Seja $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções mensuráveis, não-negativas, definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, e suponha que a série $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} g_k(x)$ é convergente para todo o $x \in I$. Mostre que

$$\int_I \sum_{k=1}^{+\infty} g_k = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_I g_k \ .$$