Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Análise Matemática III

LCI, LEA, LEBM, LEFT E LMAC
1º Exame
15 de Janeiro de 2003

Duração: 3 horas.
Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

1. Considere o conjunto

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - xy = 1\right\}.$$

(1 val.) (a) Mostre que S é uma variedade de dimensão 2;

Resolução: S é descrita pelos zeros da função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = 1 + xy - z$, que é de classe C^1. Como, $\nabla F(x, y, z) = (y, x, -1)$ nunca se anula, concluímos que S é uma variedade de dimensão $3 - 1 = 2$.

(2 val.) (b) Determine a distância de S à origem;

Resolução: Para calcular a distância de S à origem, vamos determinar o(s) ponto(s) de S que se encontra(m) mais próximo(s) da origem, ou seja o(s) ponto(s) $(x, y, z) \in S$ que minimizam $d^2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, o quadrado da distância do ponto (x, y, z) à origem.

Trata-se pois de um problema de extremos condicionados, cuja solução pode ser obtida recorrendo ao método dos multiplicadores de Lagrange: Consideramos a função

$$g(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(1 + xy - z)$$

e determinamos os seus pontos estacionários:

$$\nabla g(x, y, z, \lambda) = 0 \qquad \iff \qquad \begin{cases} 2x - \lambda y = 0, \\ 2y - \lambda x = 0, \\ 2z + \lambda = 0, \\ 1 + xy = z. \end{cases}$$

As primeiras três equações podem ser escritas como um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 0, \\ -\lambda & 2 & 0, \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

Este sistema linear tem sempre a solução $x = 0$, $y = 0$, $z = -\lambda/2$. A quarta equação diz-nos que para esta solução $z = 1$. Se o determinante da matriz do sistema, que é $2(4 - \lambda^2)$ for não nulo, esta é a única solução. Se for nulo então $\lambda = \pm 2$ e obtemos:

- $\lambda = 2$: $x = y$ e $z = -1$. A quarta equação fornece $1 + x^2 = -1$ que não tem soluções;
- $\lambda = -2$: $x = -y$ e $z = 1$. A quarta equação fornece $1 - x^2 = 1$, ou seja $x = 0$;

Em qualquer caso, $(x, y, z) = (0, 0, 1)$ e $\lambda = -2$ é a única solução do sistema.

Por outro lado, a função distância é limitada inferiormente e S é um conjunto fechado, pelo que a solução encontrada, i.e., o ponto $(0, 0, 1)$, é um ponto de mínimo. (Note-se que S é ilimitada e que a função distância à origem não é limitada superiormente em S.) Concluímos que a distância de S à origem é $d(0, 0, 1) = 1$.

(1 val.) (c) Calcule a área de $S \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1\}$.

Resolução: Seja $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Consideremos a parametrização $\mathbf{g}\colon D \to S$ dada por $\mathbf{g}(x, y) = (x, y, 1 + xy)$. Temos,

$$\begin{aligned} V_2(S) &= \iint_D \sqrt{\det(D\mathbf{g}^T D\mathbf{g})}\, dV_2(x, y) = \iint_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}\, dV_2(x, y) \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r\sqrt{1 + r^2}\, dr \right) d\theta = \frac{2\pi}{3} \left[(1 + r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

(2 val.) **2.** Considere o sólido

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0,\ 2z^2 < x^2 + y^2 < z^2 + 1\right\}.$$

Calcule a massa do sólido V sabendo que a densidade de massa é dada por $f(x, y, z) = z$.

Resolução: Utilizando coordenadas cilíndricas, vem

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{2}z}^{\sqrt{z^2+1}} \rho z \ d\rho \right) dz \right) d\theta \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 z(1 - z^2) dz = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

(2 val.) **3.** Usando coordenadas cartesianas, escreva uma expressão para o seguinte integral iterado

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1-z}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}} \rho^3 d\rho \right) dz \right) d\theta.$$

Sugestão: Escreva a equação $\rho = \frac{1-z}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}$ em coordenadas cartesianas.

Resolução: Observando que o Jacobiano das coordenadas cilíndricas é ρ e que

$$\rho = \frac{1 - z}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} \Leftrightarrow \rho\cos\theta + \rho\operatorname{sen}\theta = 1 - z \Leftrightarrow x + y + z = 1$$

temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1-z}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}} \rho^3 d\rho \right) dz \right) d\theta = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-z-y} (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

4. Considere a superfície $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1,\ x,y \geq 0\}$ e o campo vectorial $\mathbf{F} = (z,y,-x)$. Calcule $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2$, onde $\mathbf{n}$ é o campo unitário, normal a S, tal que $n^1 \geq 0$,

(2 val.) (a) usando o Teorema de Stokes para campos vectoriais;

Resolução: Pelo Teorema de Stokes,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g}.$$

O bordo de S pode ser parametrizado por $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2 :]0,\pi[\to \mathbb{R}^3$ dadas por

$$\mathbf{g}_1(\theta) = (0, \operatorname{sen}\theta, -\cos\theta);$$
$$\mathbf{g}_2(\theta) = (\operatorname{sen}\theta, 0, \cos\theta),$$

que induzem a orientação resultante da regra da mão direita. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
&\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} \\
&= \int_0^\pi (-\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, 0) \cdot (0, \cos\theta, \operatorname{sen}\theta) d\theta + \int_0^\pi (\cos\theta, 0, -\operatorname{sen}\theta) \cdot (\cos\theta, 0, -\operatorname{sen}\theta) d\theta \\
&= \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 1) d\theta = \pi.
\end{aligned}$$

(2 val.) (b) usando o Teorema da Divergência.

Resolução: Como é sabido, $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$. Designamos por U o aberto limitado por S e pelos planos $x = 0$ e $y = 0$, e por T_1 e T_2 as porções de ∂U contidas nestes planos. Pelo Teorema da Divergência temos então (notando que $\mathbf{n}$ é a normal exterior a U)

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_{T_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 + \int_{T_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_U \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})\, dV_3 = 0.$$

Observando que $d(zdx + ydy - xdz) = 2dz \wedge dx$, facilmente se conclui que $\nabla \times \mathbf{F} = (0,2,0)$. Daí que

$$\int_{T_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{T_1} (0,2,0) \cdot (-1,0,0)\, dV_2 = \int_{T_1} 0\, dV_2 = 0$$

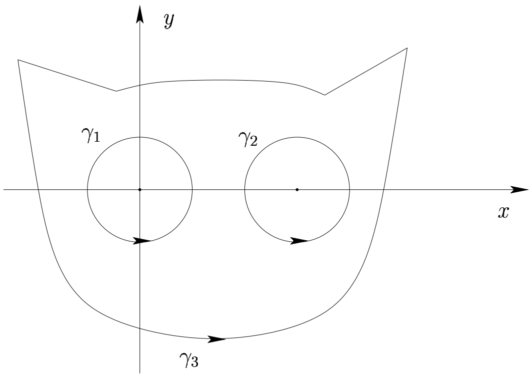
e

$$\int_{T_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \int_{T_2} (0,2,0) \cdot (0,-1,0)\, dV_2 = \int_{T_1} (-2)\, dV_2 = -2V_2(T_2) = -\pi,$$

donde mais uma vez

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 = \pi.$$

5. Sejam γ_1 e γ_2 duas circunferências de raio 1 centradas em $(0,0)$ e $(3,0)$, e γ_3 uma curva simples fechada como na seguinte figura:



Considere a forma-1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$ definida por $\omega = -\frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^2}dx + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^2}dy$. Com as orientações indicadas na figura, calcule:

(1 val.) (a) $\int_{\gamma_1} \omega$

Resolução: A parametrização $\mathbf{g} :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^3$ para γ_1 dada por

$$\mathbf{g}(\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$$

é compatível com a orientação indicada na figura. Como

$$\mathbf{g}^*\omega = \cos^2\theta d\theta,$$

temos

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{]0,2\pi[^+} \cos^2\theta d\theta = \pi.$$

(1 val.) (b) $\int_{\gamma_2} \omega$

Resolução: É fácil ver que

$$d\omega = 0.$$

O aberto $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ é um conjunto em estrela contido no domínio de ω; pelo Lema de Poincaré, ω é exacta neste conjunto. Uma vez que $\gamma_2 \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$, concluímos que

$$\int_{\gamma_2} \omega = 0.$$

(1 val.) (c) $\int_{\gamma_3} \omega$

Resolução: Uma vez que γ_3 é homotópica a γ_1 em $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, concluímos que

$$\int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega = \pi.$$

(2 val.) **6.** Mostre que a equação

$$\int_{-\infty}^{y} e^{xyt-t^2}\,dt = \int_{-\infty}^{1} e^{-t^2}\,dt$$

determina y como função de x numa vizinhança de $(0,1)$ e calcule $\frac{dy}{dx}(0)$.

Resolução:

Seja $f(x,y,t) = e^{xyt-t^2}$. Note-se que $f(x,y,-)$ é mensurável, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, pois é contínua (aliás, f é de classe C^∞). Como

$$\frac{f(x,y,t)}{e^{-|t|}} \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$$

concluímos que $f(x,y,-) \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, pois $e^{-|t|} \in L^1(\mathbb{R})$.

Consideremos as funções $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y} f(x,y,t)\,dt \\ G(x,y,z) &= \int_{-\infty}^{z} f(x,y,t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(x,y,t)\,dt + \int_{0}^{z} f(x,y,t)\,dt. \end{aligned}$$

Note-se que $F(x,y) = G(x,y,y)$ e que a equação do enunciado é $F(x,y) = F(0,1)$.

Uma vez que $f(x,y,-)$ é contínua, segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_0^z f(x,y,t)\,dt = f(x,y,z) = e^{xyz-z^2}.$$

Para (x,y,t) tal que $|x|,|y| < 2$, temos

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| &= \left|yte^{xyt-t^2}\right| \le h(t) := 2|t|e^{4|t|-t^2} \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| &= \left|xte^{xyt-t^2}\right| \le h(t). \end{aligned}$$

Ora $h \in L^1(\mathbb{R})$, pois h é contínua e $h(t)/e^{-|t|} \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$, portanto podemos aplicar a regra de Leibniz para obter

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \int_{-\infty}^{z} yte^{xyt-t^2}\,dt, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = \int_{-\infty}^{z} xte^{xyt-t^2} \qquad \forall_{(x,y,z)} : |x|,|y| < 2.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial G}{\partial y}(x,y,y) + \frac{\partial G}{\partial z}(x,y,y) = \int_{-\infty}^{y} xte^{xyt-t^2}\,dt + f(x,y,y) \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial G}{\partial x}(x,y,y). \end{aligned}$$

Em particular, $\frac{\partial F}{\partial y}(0,1) = f(0,1,1) = e^{-1} \neq 0$ e portanto, pelo Teorema da Função Implícita, a equação $F(x,y) = F(0,1)$ determina y como função de x numa vizinhança de $(0,1)$. Derivando a igualdade $F(x,y) = F(0,1)$ em ordem a x, obtemos

$$\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)} = -e\int_{-\infty}^{1} te^{-t^2}\,dt = \lim_{k\to-\infty}\left[\frac{e^{-t^2+1}}{2}\right]_k^1 = \frac{1}{2}.$$

(3 val.) **7.** Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma variedade-2 e seja $\mathbf{F}\colon\ : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo vectorial de classe C^1 tal que $\mathbf{F}$ é ortogonal a S, ou seja, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}^{\perp}S$, $\forall \mathbf{x} \in S$. Mostre que $\nabla \times \mathbf{F}$ é tangente a S, ou seja, $(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{x}) \in T_{\mathbf{x}}S$, $\forall \mathbf{x} \in S$

Resolução: Suponhamos que $\nabla \times \mathbf{F}$ não era tangente a S; então existiria algum ponto de S no qual $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} > 0$, para um vector normal unitário a S apropriado $\mathbf{n}$. Uma vez que $\mathbf{F}$ é de classe C^1, $\nabla \times \mathbf{F}$ é contínuo, e portanto seria $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} > 0$ em $S \cap U$ (que podemos supor orientável), para alguma vizinhança aberta U do ponto considerado. Sendo $\gamma \subset S \cap U$ uma curva fechada bordo de uma variedade-2 compacta $\Sigma \subset S \cap U$, teríamos então pelo Teorema de Stokes

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dV_2 > 0.$$

Mas por outro lado

$$\int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{g} = \int_{\gamma} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau}\, dV_1 = \int_{\gamma} 0\, dV_1 = 0,$$

uma vez que o vector tangente unitário $\boldsymbol{\tau}$ a γ é tangente a S e $\mathbf{F}$ é ortogonal a S. Concluímos que $\nabla \times \mathbf{F}$ tem que ser tangente a S.

Alternativamente, sabemos que localmente S é dada por $\Phi(\mathbf{x}) = 0$, onde $\nabla\Phi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ gera o espaço normal a S no ponto $\mathbf{x} \in S$. É possível mostrar que localmente um campo $\mathbf{F}$ ortogonal a S terá que ser da forma $\mathbf{F} = \alpha\nabla\Phi$ para alguma função α de classe C^1. Portanto

$$\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (\alpha\nabla\Phi) = \nabla\alpha \times \nabla\Phi + \alpha\nabla \times (\nabla\Phi) = \nabla\alpha \times \nabla\Phi,$$

e portanto $\nabla \times \mathbf{F}$ é ortogonal a $\nabla\Phi$, ou seja, é tangente a S.