Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA III

FÍSICA E MATEMÁTICA

PROVA DE 16 DE JANEIRO DE 2001

apresente e justifique todos os cálculos

2º teste: questões no verso (6 a 10),
cotação: 2.5 valores por alínea, duração: **1.5 horas** (9:00-10:30)

1º exame: todas as questões (1 a 10),
cotação: 1.25 valores por alínea, duração: **3 horas** (9:00-12:00)

(1) Considere a equação

$$x^2 + y^3 + z^4 - 2xz - 4\cos y = 0 \ .$$

(a) Mostre que, numa vizinhança do ponto $(1, 0, -1)$, esta equação define implicitamente z como função de x e de y, ou seja, define $z = f(x, y)$.
(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$, onde f é a função definida em (a).

(2) Calcule a área do conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y < 2x \ , \ 1 < x + 4y < 4\}$ recorrendo à mudança de coordenadas $g(x, y) = (\frac{y}{x}, x + 4y)$.

(3) (a) Exprima o integral iterado

$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

como um integral iterado em coordenadas esféricas.
(b) Exprima o integral iterado

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{\frac{1}{\cos\theta}} \int_{0}^{r^2} g(r, \theta, z)\, dz\, dr\, d\theta$$

como um integral iterado em coordenadas cartesianas.

(4) Considere a imagem X da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (2\cos t, 3\sin t, 0)$.
(a) Mostre que X é uma variedade de dimensão 1 em $\mathbb{R}^3$.
(b) Mostre que X tem medida nula em $\mathbb{R}^3$.

(5) Seja X uma variedade compacta de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$ que não contém a origem. Justifique que existe pelo menos um ponto p de X que minimiza a distância à origem. Mostre que a recta que une p à origem é perpendicular a X em p.

(6) Considere a variedade
$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2xy \ , \ x^2 + y^2 < 1\right\} \ .$$
(a) Calcule a área de X.
(b) Determine o(s) ponto(s) de X onde o plano tangente a X é horizontal.

(7) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por
$$f(s,t) = (s\cos t, te^{-s}, e^{2s}) \ ,$$
Calcule $f^*\omega$ para $\omega = y^2\, dx \wedge dz$.

(8) Seja
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z \ , y > 0 \ , 0 < z < 1\} \ .$$
(a) Calcule a orientação de A com componente o^{12} positiva.
(b) Calcule $\int_{A^o} e^z\, dx \wedge dy$ onde o é a orientação da alínea (a).

(9) Considere o cilindro $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 = 1\}$ e o seu subconjunto $A = \{(x,y,z) \in X : -2 < x < 2\}$. Seja o uma orientação de X à sua escolha.

(a) Use o teorema de Stokes para calcular $\int_{A^o} d\omega$, onde $\omega = y\, dx + z\, dy + x\, dz$.
(b) Considere as circunferências $C_1 = \{(-2,y,z) \in X\}$ e $C_2 = \{(2,y,z) \in X\}$ com orientações o_1 e o_2 induzidas por o. Seja α uma forma-1 fechada em X. Relacione $\int_{C_1^{o_1}} \alpha$ com $\int_{C_2^{o_2}} \alpha$.

(10) Verifique se a seguinte forma-1 é exacta no seu domínio de definição:
$$\omega = \frac{y}{(x-1)^2 + y^2}\, dx - \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2}\, dy + e^z\, dz \ .$$

Revisão de provas: 3ª feira, 23 de Janeiro, 14h-15h, sala P12

Respostas sumárias:

(1) (a) Seja $F(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4 - 2xz - 4\cos y$. A função F é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^3$ com $F(1,0,-1) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,-1) = -6 \neq 0$. Logo, pelo teorema da função implícita, a equação $F(x,y,z) = 0$ define $z = f(x,y)$ numa vizinhança de $(x,y) = (1,0)$ com $f(1,0) = -1$.

(b) Como em toda uma vizinhança de $(x,y) = (1,0)$ é $F(x,y,f(x,y)) = 0$, pela regra da cadeia tem-se

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,f(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \ , \quad \forall (x,y) \in \text{ essa vizinhança} \ .$$

Portanto, uma vez que $f(1,0) = -1$, vem $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0,-1)}{\frac{\partial F}{\partial z}(1,0,-1)} = 0$.

(2) A função g tem $\det g'(x,y) = \det \begin{bmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{x+4y}{x^2} \neq 0$ em $\mathbb{R}^2$ excepto o eixo dos yy e a recta de equação $x + 4y = 0$, onde é uma mudança de coordenadas. Pelo teorema da função inversa, a transformação inversa tem $\det(g^{-1})'(u,v) = -\frac{x^2}{x+4y}\Big|_{x=\frac{v}{1+4u},\, y=\frac{uv}{1+4u}} = -\frac{v}{(1+4u)^2}$. A imagem de X por g é $g(X) = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2\ ,\ 1 < v < 4\}$. Pelo teorema de mudança de coordenadas para o integral,

$$\text{Área de } X = \int_X 1\, dV = \int_{g(X)} \left| -\frac{v}{(1+4u)^2} \right| dV \ .$$

Então, pelo teorema de Fubini,

$$\text{Área de } X = \int_1^4 \int_1^2 \frac{v}{(1+4u)^2}\, du\, dv = \int_1^4 v\, dv \cdot \int_1^2 \frac{1}{(1+4u)^2}\, du = \frac{1}{6} \ .$$

(3) (a) O sólido de integração é a porção no segundo octante da intersecção da bola $\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 2\}$ com o cone $\{(x,y,z) : z^2 \geq x^2 + y^2\}$. Em coordenadas esféricas, o integral fica

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{\sqrt{2}} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\, r^2 \sin\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi \ .$$

(b) O sólido de integração é a porção no primeiro octante que fica abaixo do parabolóide $\{(x,y,z) : z = x^2 + y^2\}$ e no interior do prisma triangular limitado pelos planos $y = 0$, $x = 1$ e $x = y$. Em coordenadas cartesianas, o integral fica

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{x^2+y^2} g(\sqrt{x^2+y^2}, \arctan\frac{y}{x}, z)\, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dz\, dy\, dx \ .$$

(4) (a) O conjunto X é o nível 0 da função $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1, z)$ cuja derivada $g'(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{x}{2} & \frac{2y}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ só não tem característica máxima na origem. Como a origem não pertence a X, conclui-se que $X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = (0,0)\}$ é uma variedade de dimensão $3 - 2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$.

(b) A variedade X é uma elipse no plano xy, contida, por exemplo, em cada rectângulo $R_\varepsilon = [-2,2] \times [-3,3] \times [-\varepsilon,\varepsilon]$ $(\varepsilon \geq 0)$, o qual tem medida $V(R_\varepsilon) = 48\varepsilon$. Tomando $\varepsilon = 0$, conclui-se que X tem medida nula.

(5) Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, a função "quadrado da distância à origem". Como f é contínua e X é compacta, f assume valor mínimo. Seja $p \in X$ um ponto onde f toma o valor mínimo. Por definição de variedade, existe uma função $g : V \to \mathbb{R}$ definida numa vizinhança V de p em $\mathbb{R}^3$ tal que $X \cap V$ é o nível zero de g e a matriz jacobiana de g tem característica máxima em todos os pontos da vizinhança V (i.e., $\operatorname{grad} g(x,y,z) \neq 0$, $\forall (x,y,z) \in V$). Pela regra dos multiplicadores de Lagrange, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que p é ponto crítico da função $F : V \to \mathbb{R}$, $F \stackrel{\text{def}}{=} f + \lambda g$. Ou seja, para esse λ tem-se $\operatorname{grad} F(p) = 0$, i.e. $\operatorname{grad} f(p) = -\lambda \operatorname{grad} g(p)$. Como o vector $\operatorname{grad} g(p)$ gera o espaço normal a X em p e como $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$, conclui-se que $\operatorname{grad} f(p) = 2p$ é um vector normal a X em p, pelo que a recta que une p à origem (a qual tem a direcção do vector p) é perpendicular a X em p.

Continuação das respostas sumárias:

(6) (a) A variedade X tem parametrização global $g : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1\} \to X$, $g(x,y)=(x,y,2xy)$. Como $g'(x,y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$, tem-se $\mathcal{J}g(x,y) = |(e_1+2ye_3)\wedge(e_2+2xe_3)| = |e_{12}+2xe_{13}-2ye_{23}| = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$. Usando coordenadas polares e o teorema de Fubini, a área de X é

$$V_2(X) = \int_X 1\, dV_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4r^2}\; r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right) .$$

(b) Em cada ponto $(x,y,z)\in X$, o espaço tangente de X é gerado pelos vectores $(1,0,2y)$ e $(0,1,2x)$. Os pontos de X onde o plano tangente a X é horizontal têm que ter coordenadas tais que $2y=0$ e $2x=0$, logo o único ponto de X nestas condições é a origem $(0,0,0)$.

(7) Sejam $f_x = s\cos t$, $f_y = te^{-s}$ e $f_z = e^{2s}$. Então

$$f^*\omega = (f_y)^2\, df_x \wedge df_z = t^2e^{-2s}(\cos t\, ds - s\sin t\, dt)\wedge(2e^{2s}\, ds) = 2st^2\sin t\, ds\wedge dt .$$

(8) (a) Considere-se a parametrização de A dada por coordenadas polares no plano yz, $g :]0,1[\times]0,\pi[\to A$, $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2)$. A orientação em A induzida por g,

$$\frac{\frac{\partial g}{\partial r}\wedge\frac{\partial g}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial g}{\partial r}\wedge\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|} = \frac{r\, e_{12} + 2r^2\sin\theta\, e_{13} - 2r^2\cos\theta\, e_{23}}{\sqrt{r^2+4r^4}} ,$$

tem componente em e_{12} positiva, pelo que esta é a orientação o pedida.

(b)

$$\int_{A^o} e^z\, dx\wedge dy = \int_0^\pi\int_0^1 e^{r^2} r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1) .$$

(9) (a) Escolhendo parametrizações em termos de um parâmetro angular $\theta \in]0,2\pi[$ para cada uma das circunferências que formam ∂A, tem-se

$$\begin{array}{rclcrcl} g_1(\theta) & = & (-2,\cos\theta,\sin\theta) & \text{e} & g_2(\theta) & = & (2,\sin\theta,\cos\theta) \\ g_1'(\theta) & = & (0,-\sin\theta,\cos\theta) & & g_2'(\theta) & = & (0,\cos\theta,-\sin\theta) . \end{array}$$

(Uma orientação em A determina a orientação em cada uma das componentes de ∂A, daí esta escolha das parametrizações.) Pelo teorema de Stokes, o integral pedido é

$$\int_{A^o} d\omega = \int_{\partial A^o}\omega = \int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta - 2\cos\theta)\, d\theta + \int_0^{2\pi}(\cos^2\theta - 2\sin\theta)\, d\theta = 0 .$$

(b) Já que $\partial A^o = C_1^{o_1}\cup C_2^{o_2}$, usando o teorema de Stokes e o facto de α ser fechada, obtém-se

$$\int_{C_1^{o_1}}\alpha + \int_{C_2^{o_2}}\alpha = \int_{\partial A^o}\alpha = \int_{A^o} d\alpha = 0 ,$$

pelo que os integrais indicados são simétricos: $\int_{C_1^{o_1}}\alpha = -\int_{C_2^{o_2}}\alpha$.

(10) A forma ω é fechada no seu domínio $D = \mathbb{R}^3\setminus\{(1,0,z) : z\in\mathbb{R}\}$ (o qual não é simplesmente conexo). Seja X uma circunferência em D com parametrização $g(t) = (1+\cos t, \sin t, 0)$, $t\in[0,2\pi]$, e orientação o induzida por g. Então

$$\int_{X^o}\omega = \int_0^{2\pi}\left(\frac{-\sin^2 t}{1} - \frac{\cos^2 t}{1}\right) dt = -2\pi \neq 0$$

logo ω não pode ser exacta; se fosse exacta, o integral seria zero pelo teorema de Stokes, porque X é compacta e $\partial X = \emptyset$.