Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Exercícios Propostos

Variedades. Multiplicadores de Lagrange

1 Mostre que cada um dos conjuntos seguintes é uma variedade, determine a respectiva dimensão e descreva-o parametricamente:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$.

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = \tan x \, ; \ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$.

c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \, ; \ y > |x| \, ; \ |z| < 2\}$.

d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1 \, ; \ z > 0\}$.

e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \, ; \ z > \frac{1}{2}\}$.

f) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = z^2 + 1 \, ; \ |z| < 1\}$.

2 Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$L = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 1 \, ; \ z = x^2 - y^2\right\},$$

no ponto $(1,0,1)$.

3 Determine o espaço tangente e o espaço normal à variedade

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2 \, ; \ x^2 + y^2 < 1\right\},$$

no ponto $(1,0,1)$.

4 Para cada um dos casos seguintes, determine os extremos da função f no conjunto S:

a) $f(x,y,z) = x + y + z, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 = 2 \, ; \ x + z = 1\}$.

b) $f(x,y,z) = xyz, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

c) $f(x,y,z) = x - y + z, \qquad S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$.

5 Use o Método dos Multiplicadores de Lagrange para determinar os pontos de máximo da função $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ no disco de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$.

6 Uma caixa rectangular, sem tampa, tem área igual a 16 m^2. Determine as dimensões da caixa que maximizam o seu volume.