

Análise Matemática II
1º semestre de 2006/2007

Exercícios para a aula prática

- (1) Determine o gradiente das seguintes funções:
- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$;
 - (b) $f(x, y) = e^x \cos y$;
 - (c) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$;
 - (d) $f(x, y, z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$.
- (2) Calcule as derivadas direccionais das seguintes funções para os vectores e pontos dados:
- (a) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ no ponto $(1, 1, 0)$ na direcção do vector $(1, -1, 2)$.
 - (b) $f(x, y, z) = (x/y)^z$ no ponto $(1, 1, 1)$ na direcção do vector $(2, 1, -1)$.

- (3) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ duas funções definidas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \sin(y + 2x)),$$
$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3, 2v - u^2).$$

- (a) Calcule as matrizes jacobianas $Df(x, y)$ e $Dg(u, v, w)$.
 - (b) Calcule a derivada $D_{(1,1)}f(1, 0)$.
 - (c) Calcule a derivada $D_{(1,0,0)}g(1, 1, 1)$.
- (4) Sejam $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ duas funções definidas por

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z, 2x + y + z^2),$$
$$g(u, v, w) = (uv^2w^2, w^2 \sin v, u^2e^v).$$

- (a) Calcule as matrizes jacobianas $Df(x, y, z)$ e $Dg(u, v, w)$.
- (b) Calcule a derivada $D_{(2,1,1)}f(0, 0, 0)$.
- (c) Calcule a função composta $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$.
- (d) Mostre que a matriz jacobiana $Dh(u, 0, w)$ é dada pelo produto das matrizes $Df[g(u, 0, w)].Dg(u, 0, w)$.