COMBINATÓRIA E TEORIA DE CÓDIGOS
TPC 4

(para entregar até 29/4/2011)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Sejam C_1 e C_2 códigos q-ários lineares de parâmetros $[n, k_1, d_1]$ e $[n, k_2, d_2]$, respectivamente.
   (a) Mostre que o código $C_1 * C_2$ (a construção de Plotkin) é linear.
   (b) Se G_1 e G_2 são, respectivamente, matrizes geradoras de C_1 e C_2, escreva uma matriz geradora de $C_1 * C_2$ em termos de G_1 e G_2.
   (c) Se H_1 e H_2 são, respectivamente, matrizes de paridade para C_1 e C_2, escreva uma matriz de paridade para $C_1 * C_2$ em termos de H_1 e H_2.

2. Seja C o código binário com a seguinte matriz de paridade

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Determine os parâmetros $[n, k, d]$ do código C.
   (b) Mostre que C pode ser usado para corrigir todos os erros de peso 1 e todos os erros de peso 2 com a última coordenada não nula. Poderá este código ser usado para corrigir simultaneamente os erros anteriores e mais algum erro de peso 2?
   (c) Descreva um algoritmo de descodificação que corrija os erros indicados na alínea anterior e descodifique o vector recebido $y = 10111011$.

3. Seja C um código q-ário MDS de parâmetros $[n, k]$ com $k < n$.
   (a) Mostre que existe um código q-ário MDS de comprimento n e dimensão $n - k$.
   (b) Mostre que existe um código q-ário MDS de comprimento $n - 1$ e dimensão k.

4. Considere o espaço vectorial $V = \mathbb{F}_q^3$.
   (a) Mostre que V contém $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$ subespaços vectoriais de dimensão 1.
   (b) Mostre que V contém $\frac{q^3-1}{q-1} = q^2 + q + 1$ subespaços vectoriais de dimensão 2.
   (c) Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos subespaços de dimensão 1 e seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos subespaços de dimensão 2. Mostre que $\mathcal{P}$ (o conjunto dos pontos) e $\mathcal{B}$ (o conjunto dos blocos), com a relação $P \in \mathcal{P}$ pertence a $B \in \mathcal{B}$ se P é subespaço de B, definem um sistema de Steiner $S(2, q+1, q^2+q+1)$. Como o número de pontos e o número de blocos é o mesmo, este sistema de Steiner diz-se uma geometria projectiva de dimensão 2 (ou um plano projectivo) de ordem q, e é geralmente denotado por $PG(2, q)$ ou $PG_2(q)$.

5. Para um código C qualquer, define-se $A_i = \#\{x \in C : w(x) = i\}$. Determine os números A_i para o código de Golay estendido G_{24}. [Sugestão: Mostre que $\vec{1} \in G_{24}$.]