COMBINATÓRIA E TEORIA DE CÓDIGOS
Ficha 9

1/6/2010

1. Seja $C \subset \mathbb{F}_q^n$ um código linear com distância mínima $d(C) = d$. Mostre que, se o vector $x \in \mathbb{F}_q^n$ tem peso $w(x) \leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$, então x é o único chefe de classe de $x + C$.

2. Mostre que os únicos códigos MDS binários são os triviais.

3. Seja C um código q-ário MDS de parâmetros $[n, k]$ com $k < n$.
   (a) Mostre que existe um código q-ário MDS de comprimento n e dimensão $n - k$
   (b) Mostre que existe um código q-ário MDS de comprimento $n - 1$ e dimensão k.

4. Seja C um código Reed-Solomon $[10, 6]$ sobre $\mathbb{F}_{11}$. Escreva uma matriz geradora do código C e determine a distância mínima $d(C)$.

5. Determine o polinómio gerador de um código Reed-Solomon sobre $\mathbb{F}_{16}$ de dimensão 10. Escreva uma matriz de paridade para este código.

6. Mostre que o dual de um código Reed-Solomon é também um código Reed-Solomon.

7. Seja C um código de Reed-Solomon [3,2] sobre $\mathbb{F}_4$.

   (a) Seja α uma raíz do polinómio $1+t+t^2 \in \mathbb{F}_2[t]$ e considere a aplicação $\phi : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_2^2$ definida por $\phi(a_0 + a_1\alpha) = (a_0, a_1)$. Determine os parâmetros de $C^* = \phi^*(C)$.

   (b) Seja $\hat{\phi} : \mathbb{F}_4 \to \mathbb{F}_2^3$ definida por $\hat{\phi}(a_0 + a_1\alpha) = (a_0, a_1, a_0 + a_1)$. Determine os parâmetros de $C' = \hat{\phi}^*(C)$.

   (c) O que pode concluir acerca da capacidade de correcção de erros aleatórios e/ou erros acumulados de C^* e de C'?

8. Seja α uma raíz do polinómio $1+t^2+t^3 \in \mathbb{F}_2[t]$ e considere a aplicação $\phi : \mathbb{F}_8 \to \mathbb{F}_2^3$ definida por $\phi(a_1+a_2\alpha+a_3\alpha^2) = (a_1, a_2, a_3)$, onde $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{F}_2$. Considere o código linear $A = \langle(\alpha+1, \alpha^2+1, 1)\rangle$ sobre $\mathbb{F}_8$. Determine todas as palavras do código $\phi^*(A)$. Quais os parâmetros de $\phi^*(A)$?

9. Seja α uma raíz do polinómio $1+t+t^2 \in \mathbb{F}_2[t]$. Considere o código linear

$$A = \langle(1,1), (\alpha, 1+\alpha)\rangle$$

   sobre $\mathbb{F}_4$ e o código binário

$$B = \{0000, 1100, 1010, 0110\}.$$

   Seja $\phi : \mathbb{F}_4 \to B$ a aplicação linear definida por $\phi(1) = 1100$ e $\phi(\alpha) = 1010$. Determine todas as palavras do código $C = \phi^*(A)$. Quais os parâmetros de C?