

Cálculo Diferencial e Integral - II

TESTE 2 - VERSÃO B

4 de Junho de 2011 - das 9h30m às 11h

Apresente e justifique todos os cálculos

1. Considere o conjunto

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 + x^2 + y^2 \leq z \leq 2; 0 \leq x \leq y\}.$$

[3 val.] (a) Escreva uma expressão para o volume de D como integrais iterados da forma $\int (\int (\int dz) dy) dx$.

[3 val.] (b) Calcule a massa do sólido descrito por D , com densidade de massa dada por $\sigma(x, y, z) = z$.

[3 val.] 2. Considere o campo vectorial $F(x, y) = (2y + x^5, 3x + y^3) + \nabla\varphi(x, y)$ onde $\varphi(x, y) = \sin\left(\frac{\pi xy}{2}\right)$. Calcule o trabalho de F ao longo da fronteira do quadrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2; |y| \leq 2\}$ percorrida no sentido horário.

3. Sejam $F(x, y, z) = (x, y, z + 1)$,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}; x > 0; z > 0\}$$

e seja $n = (n_1, n_2, n_3)$ a normal a S , unitária, tal que $n_3 > 0$.

[2 val.] (a) Calcule a área de S .

[3 val.] (b) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ pela definição.

[3 val.] (c) Calcule o fluxo $\iint_S F \cdot n$ usando o Teorema da Divergência.

[3 val.] 4. Sejam $U \subset \mathbb{R}^2$ um domínio regular e $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 . Considere a superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x, y); (x, y) \in U\}.$$

Prove o Teorema de Stokes para a superfície T e para um campo vectorial de classe C^1 , G , da forma $G = (G_1, G_2, 0)$.

Sugestão: Use o Teorema de Green.