Revisão de Álgebra Linear com aplicação ao Cálculo II

Revisão de Álgebra Linear

1. Dada uma direcção $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ e um ponto $P = (a, b, c)$
   (a) a equação cartesiana do plano perpendicular ao vector v que passa pelo ponto P é
   $$v \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0 \ ;$$
   (b) a equação paramétrica da recta paralela ao vector v que passa por P é
   $$(x, y, z) = P + \alpha v, \quad \alpha \in \mathbb{R} \ .$$
2. Dados duas direcções $u, v \in \mathbb{R}^3$ linearmente independentes, e um ponto $P = (a, b, c)$
   (a) a equação paramétrica do plano paralelo aos vectores u e v que passa por P é
   $$(x, y, z) = P + \alpha u + \beta v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \ ;$$
   (b) a equação cartesiana da recta perpendicular aos vectores u e v que passa pelo ponto P é
   $$\begin{cases} u \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0 \\ v \cdot (x - a, y - b, z - c) = 0 \ . \end{cases}$$
3. Dados vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$
   (a) o espaço gerado por estes vectores é
   $$V = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k \ : \ \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \ ;$$
   (b) o complemento ortogonal de V é
   $$V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ v_1 \cdot x = v_2 \cdot x = \cdots = v_k \cdot x = 0\} \ ,$$
   i.e., é o conjunto das soluções do seguinte sistema linear
   $$\begin{cases} v_1 \cdot x & = 0 \\ & \vdots \\ v_k \cdot x & = 0 \end{cases} ,$$
   o que ainda é equivalente a detreminar o núcleo da matriz cujas linhas são os vectores $v_1, \ldots, v_k$.
   (c) Recorde ainda que $\left(V^\perp\right)^\perp = V$, para qualquer espaço vectorial $V \subset \mathbb{R}^n$.

Aplicação ao Cálculo II

A. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão d descrita por um **conjunto de nível**

$$M = N_F(k) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, F(x) = k\} \ ,$$

onde $k \in \mathbb{R}^{n-d}$ é um vector constante, e $F : U \to \mathbb{R}^{n-d}$ (com $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto) é uma função de classe C^1 tal que a característica da matriz derivada $DF(x)$ é $n-d$ em todos os pontos $x \in M$. Seja $P \in M$. Então, **as linhas de $\boldsymbol{DF(P)}$ formam uma base para o espaço normal $\boldsymbol{T_P M^\perp}$**.

Portanto,

(i) podemos usar 3(a) para descrever o espaço normal $T_P M^\perp$ e 3(b) para descrever o espaço tangente $T_P M$.

Exemplo: Determinar uma base para o espaço tangente $T_P M$ da variedade

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 3z^2 = 11\}$$

no ponto $P = (1, 2, -1)$.
Seja $F(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 3z^2$. Então M é o conjunto de nível 11 de F. Como

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 4x + 2y + 2z & 2x + 2y & 2x + 6z \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad DF(1, 2, -1) = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -4 \end{bmatrix} \ ,$$

o vector $(6, 6, -4)$ é normal a M em $(1, 2, -1)$. Os vectores tangentes a M em P são as soluções de

$$(6, 6, -4) \cdot (x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = \frac{3x}{2} + \frac{3y}{2} \text{ e } x, y \text{ são variáveis livres} \ .$$

Portanto $\{(1, 0, \frac{3}{2}), (0, 1, \frac{3}{2})\}$ é uma base para o espaço tangente.

(ii) Se $M \subset \mathbb{R}^3$ tem dimensão 1 (curva), podemos usar 1(a) para determinar o plano normal a M no ponto P, e usar 1(b) para determinar a recta tangente a M em P.

Exemplo: Seja $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \mathrm{e}^x + (x + y)^2 + z = 4\,,\, 3x + z = 2\}$ e seja $P = (0, -1, 2) \in M$. Portanto $M = N_F(4, 2)$ onde $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é a função dada por

$$F(x, y, z) = (\mathrm{e}^x + (x + y)^2 + z, 3x + z) \ .$$

Derivando obtém-se

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^x + 2(x + y) & 2(x + y) & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e substituindo no ponto P dado fica

$$DF(0, -1, 2) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ .$$

Portanto os vectores $(-1, 2, 1)$ e $(3, 0, 1)$ são normais a M no ponto $(0, -1, 2)$, donde

$$(x, y, z) = (0, -1, 2) + \alpha(-1, 2, 1) + \beta(3, 0, 1), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

é uma equação paramétrica para o plano normal a M no ponto $(0, -1, 2)$ e

$$\begin{cases} (-1, 2, 1) \cdot (x, y + 1, z - 2) = 0 \\ (3, 0, 1) \cdot (x, y + 1, z - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2y + z = 0 \\ 3x + z = 2 \end{cases}$$

é a equação cartesiana da recta tangente a M no ponto $(0, -1, 2)$.

(iii) Se $M \subset \mathbb{R}^3$ tem dimensão 2 (superfície), podemos usar 2(b) para determinar a recta normal a M no ponto P, e usar 2(a) para determinar o plano tangente a M em P.

Exemplo: Seja $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, 2x^2+(x-y)^2+3(x+\frac{z}{3})^2 = 30\}$. Determinar o(s) ponto(s) $P \in M$ tais que o plano tangente a M em P é horizontal, i.e., perpendicular ao eixo dos zz.

Como M é o conjunto de nível 30 da função $F(x,y,z) = 2x^2 + (x-y)^2 + 3\big(x+\frac{z}{3}\big)^2$, então

$$\nabla F(x,y,z) = \Big(4x + 2(x-y) + 6\Big(x+\frac{z}{3}\Big), -2(x-y), 2\Big(x+\frac{z}{3}\Big)\Big)$$

é um vector normal a M no ponto $(x,y,z) \in M$. Portanto, o plano tangente a M em (x,y,z) é horizontal se e só se $\nabla F(x,y,z) = (0,0,\alpha)$, com $\alpha \neq 0$, se e só se

$$\begin{cases} 4x + 2(x-y) + 6\big(x+\frac{z}{3}\big) = 0 \\ -2(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x + 2z = 0 \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -5x \\ y = x \end{cases} .$$

Os pontos $(x,x,-5x)$ pertencem a M se e só se $F(x,x,-5x) = 30$ se e só se

$$2x^2 + 0 + 3\Big(x - \frac{5x}{3}\Big)^2 = 30 \Leftrightarrow 2x^2 + \frac{4}{3}x^2 = 30 \Leftrightarrow \frac{10x^2}{3} = 30 \Leftrightarrow x = \pm 3 .$$

Conclusão: os pontos de M onde o plano tangente é horizontal são $(3,3,-15)$ e $(-3,-3,15)$.

B. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade de dimensão d com uma **parametrização** $g : U \to \mathbb{R}^n$ (com $U \subset \mathbb{R}^d$ aberto) e seja $P = g(a) \in M$, onde $a \in U$. Então **as colunas da matriz derivada $\boldsymbol{Dg(a)}$ formam uma base para o espaço tangente $\boldsymbol{T_P M}$**.

Portanto,

(i) podemos usar 3(a) para descrever o espaço tangente $T_P M$ e 3(b) para descrever o espaço normal $T_P M^{\perp}$.

Exemplo: Seja M a variedade parametrizada por $g(x) = (x, x^2, \mathrm{arctg}(x))$, onde $x \in \mathbb{R}$, e considere o ponto $P = g(\sqrt{3}) = (\sqrt{3}, 3, \frac{\pi}{3})$. Como

$$g'(x) = \Big(1, 2x, \frac{1}{1+x^2}\Big) ,$$

$g'(\sqrt{3}) = \big(1, 2\sqrt{3}, \frac{1}{4}\big)$ é um vector tangente a M em P e, portanto,

$$T_P M = \big\{\alpha\big(1, 2\sqrt{3}, \tfrac{1}{4}\big) \, : \, \alpha \in \mathbb{R}\big\}$$

e, como

$$\big(1, 2\sqrt{3}, \tfrac{1}{4}\big) \cdot (x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}y - \frac{z}{4} ,$$

então

$$T_P M^{\perp} = \Big\{\Big(-2\sqrt{3}y - \frac{z}{4}, y, z\Big) \, : \, y,z \in \mathbb{R}\Big\} .$$

(ii) Se $M \subset \mathbb{R}^3$ tem dimensão 1 (curva), podemos usar 1(b) para determinar a recta tangente a M no ponto P, e usar 1(a) para determinar o plano normal a M em P.

Exemplo: Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ a curva parametrizada por $g(t) = (1+\cos(\pi t), \mathrm{sen}(\pi t), \mathrm{e}^{t-1})$, para $-1 < t < 3$. Seja $P = (1, -1, \sqrt{\mathrm{e}}) \in M$. Então

$$g'(t) = (-\pi\,\mathrm{sen}(\pi t), \pi\cos(\pi t), \mathrm{e}^{t-1})$$

é um vector tangente a M no ponto $g(t)$. Para obtermos um vector tangente a M em P temos primeiro de determinar o "instante" t em que a parametrização g "passa por" P:

$$g(t) = P \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\cos(\pi t) = 1 \\ \operatorname{sen}(\pi t) = -1 \\ \mathrm{e}^{t-1} = \sqrt{\mathrm{e}} \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2}\,,$$

i.e., $P = g\left(\frac{3}{2}\right)$. Como $g'\left(\frac{3}{2}\right) = (\pi, 0, \sqrt{\mathrm{e}})$, temos que

$$(x,y,z) = (1,-1,\sqrt{\mathrm{e}}) + \alpha(\pi, 0, \sqrt{\mathrm{e}}), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

é a recta tangente a M em P e

$$(\pi, 0, \sqrt{\mathrm{e}}) \cdot (x-1, y+1, z-\sqrt{\mathrm{e}}) = 0 \Leftrightarrow \pi x + \sqrt{\mathrm{e}} z = \pi + \mathrm{e}$$

é o plano normal a M em P.

(iii) Se $M \subset \mathbb{R}^3$ tem dimensão 2 (superfície), podemos usar 2(a) para determinar o plano tangente a M no ponto P, e usar 2(b) para determinar a recta normal a M em P.

Exemplo: Seja $M = \{(u+v, 2v-u, 1-uv^3) \in \mathbb{R}^3 : u, v \in \mathbb{R}\}$ e $P = g(3,1) = (4,-1,-2)$. Então a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(u,v) = (u+v, 2v-u, 1-uv^3)$ é uma parametrização de M. Portanto

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = (1,-1,-v^3) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = (1,2,-3uv^2)$$

são vectores tangentes a M no ponto $g(u,v) \in M$, logo

$$\frac{\partial g}{\partial u}(3,1) = (1,-1,-1) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g}{\partial v}(3,1) = (1,2,-9)$$

são tangentes a M em P e, portanto,

$$(x,y,z) = (4,-1,-2) + \alpha(1,-1,-1) + \beta(1,2,-9), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

é o plano tangente a M em P e

$$\begin{cases} (1,-1,-1) \cdot (x-4, y+1, z+2) = 0 \\ (1,2,-9) \cdot (x-4, y+1, z+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z = 7 \\ x+2y-9z = 20 \end{cases}$$

é a recta normal a M em P.

C. Note que se verifica sempre que

$$\begin{aligned} \dim\big(T_P M\big) &= d = \text{dimensão da variedade } M, \\ \dim\big(T_P M^{\perp}\big) &= n - d. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Exercício: Em cada um dos exemplos anteriores, indique a dimensão de M e verifique as igualdades $(*)$.