

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 6

(Teorema de Fubini)

1. Calcule o integral da função indicada no rectângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

(a) $f(x, y) = x^2 y$.

(b) $f(x, y) = y \operatorname{sen}(xy)$.

2. Invertendo a ordem de integração, calcule

(a) $\int_0^1 \left(\int_{3y}^3 e^{x^2} dx \right) dy$.

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^{\operatorname{arcsen} y} y \operatorname{sen} x dx \right) dy$.

3. Inverta a ordem de integração dos seguintes integrais duplos

(a) $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy \right) dx$.

(b) $\int_1^2 \left(\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy \right) dx$.

(c) $\int_0^{2\pi} \left(\int_{-1}^{\operatorname{sen} y} f(x, y) dx \right) dy$.

4. Calcule a área da seguinte região

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2 - x^2\}$$

usando um integral iterado da forma $\int(\int dx)dy$. Calcule ainda (usando a ordem de integração que entender) as coordenadas do centro de massa, e os momentos de inércia em torno dos eixos Ox , Oy e da origem de uma placa com a forma descrita por D admitindo que a densidade de massa é constante igual a 1.

5. Escreva expressões para o volume de V na ordem indicada.

(a) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, 0 \leq z \leq x + y\}$ nas ordens $\int(\int(\int dy) dz) dx$ e $\int(\int(\int dx) dy) dz$.

(b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1 ; x^2 + z^2 \leq 1\}$ nas ordens $\int(\int(\int dy) dx) dz$ e $\int(\int(\int dz) dy) dx$.

(c) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 - y^2 \leq z \leq 1\}$ nas ordens $\int(\int(\int dx) dy) dz$ e $\int(\int(\int dy) dz) dx$.

(d) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x}{2} \leq y \leq x ; 0 \leq z \leq x ; x \leq 1\}$ nas ordens $\int(\int(\int dz) dy) dx$, $\int(\int(\int dz) dx) dy$ e $\int(\int(\int dx) dy) dz$.

6. Considere a região

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z \leq 1 ; x + y - 2z \leq 1 ; x \geq 0 ; y \geq 0\}.$$

Calcule o volume de V na forma:

a) $\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \dots dx \right) dy \right) dz$.

b) $\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \left(\int_{\dots}^{\dots} \dots dz \right) dy \right) dx$.

7. Calcule $\int_V f$ sendo

- (a) $f(x, y, z) = \frac{1}{(1+x+y+z)^3}$ e V o sólido limitado pelos planos coordenados e o plano $x+y+z = 1$.
- (b) $f(x, y, z) = xyz$ e V o sólido limitado pelos planos $x = 1, x = 0, y = 1, y = 0, z = 0$ e o parabolóide $z = x^2 + y^2$.
8. Calcule o volume e as coordenadas do centróide do sólido limitado pela superfície $z = x^2 - y^2$, o plano xy e os planos $x = 1$ e $x = 3$.