Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 4

(Derivada da Função Composta)

1. Calcule a derivada $D(f \circ g)(1,1)$ em que
$$f(u,v) = (\tan(u-1) - e^v, u^2 - v^2)\,; \quad g(x,y) = (e^{x-y}, x-y).$$

2. Considere as funções $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$ e $\sigma(t) = F(\gamma(t))$. Calcule a derivada $\sigma'(t)$.

3. Calcule a derivada parcial $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ em que
$$h(x,y) = f(e^{-x-y}, e^{xy})\,; \quad f(u,v) = u + v^2$$

4. Considere a função $f(x,y,z) = e^x yz$ e seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma função de classe C^1 tal que $g(0,0) = (0,1,2)$ e
$$Dg(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
Calcule a derivada $D_v(f \circ g)(0,0)$ em que $\vec{v} = (1,2)$.

5. Considere a função $\sigma(x) = f(x, x^2+1)$ em que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é de classe C^1 e tal que
$$Df(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$
Calcule a derivada $\sigma'(0)$.

6. Sejam $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1 e tais que se verifica a equação $F(x, g(x)) = 0$. Supondo que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) \neq 0$ calcule a derivada $g'(x)$.

7. Determine a recta tangente e o plano normal à linha definida por
$$\{(\cos t, \operatorname{sen} t, t)\ ;\ -\pi < t < \pi\}$$
no ponto $(1,0,0)$.

8. Determine a recta normal e o plano tangente ao cone
$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ z = \sqrt{x^2+y^2}\,\}$$
no ponto $(1,0,1)$.