Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Ficha de trabalho 12

(Teorema de Green. Teorema da Divergência. Teorema de Stokes)

1. Considere o campo vectorial $F(x,y) = (-\frac{1}{3}y^3, \frac{1}{3}x^3)$ e a circunferência Γ dada pela equação $x^2 + y^2 = 10$ e orientada no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por F ao longo de Γ.

2. Considere o campo vectorial
$$F(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} + \frac{y}{(x+1)^2+y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-(x+1)}{(x+1)^2+y^2} \right).$$
   a) Será F conservativo no seu domínio ?
   b) Calcule o trabalho realizado por F ao longo da circunferência definida pela equação $x^2 + y^2 = 100$, percorrida no sentido anti-horário.

3. Use o Teorema de Green para calcular a área de uma elipse definida por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, em que $a, b > 0$.

4. Considere a superfície
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2,\ z > 0\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z < 0$. Seja $H(x,y,z) = (y^2+x, x^2+y, 2z)$. Calcule o fluxo $\int_A H \cdot n$.

5. Considere a superfície
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4,\ -1 < z < 1\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_z > 0$ nos pontos de S com coordenada $z > 0$. Seja $F(x,y,z) = (\cos(yz) + 2x, x^3 + y, z + 1)$. Calcule o fluxo de F através de S no sentido de n, $\int_S F \cdot n$.

6. Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (x^3, y^3, z)$ através do cone definido por
$$z = \sqrt{x^2+y^2}\ ;\ 0 < z < 1,$$
orientado com a normal n com terceira componente positiva.

7. Calcule o volume da bola esférica de raio r usando o teorema da divergência.

8. Considere a superfície
$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2+y^2,\ x^2+y^2 < 1\},$$
orientada com a normal n tal que $n_z < 0$. Seja $F(x,y,z) = (-y, x, 1)$. Calcule o fluxo $\int_A F \cdot n$:
   a) Pela definição.
   b) Pelo teorema da divergência.
   c) Pelo teorema de Stokes.

9. Considere a superfície
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = \sqrt{x^2+z^2},\ 0 < y < 1\},$$
orientada com a normal unitária n tal que $n_y > 0$. Seja $F(x,y,z) = (x, -y, 0)$. Calcule o fluxo $\int_E F \cdot n$:
   a) Pela definição.
   b) Pelo teorema da divergência.
   c) Pelo teorema de Stokes.